ÜBER DAS POTENTIAL MEHRFACH BELEGTER FLÄCHEN

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

VEREINIGTEN FRIEDRICHS-UNIVERSITÄT
HALLE-WITTENBERG

VORGELEGT

VON

MARGARETE FREUND
AUS HALLE

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

HALLE (SAALE)
BUCHDRUCKEREI HOHMANN
1922

Referent: Herr Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. GUTZMER.
Tag der mündlichen Prüfung: 19. Juli 1922.

Meinen Eltern!

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 1

I. Das Potential dreifach belegter Flächen 2

§ 1. Das Potential einer dreifach belegten Kugelfläche 2

§ 2. Das Potential eines dreifach belegten Rotationsellipsoides . 5

II. Das Potential einer n-fach belegten Kugelfläche 26

Bemerkung: Die Abhandlung Wangerin, Über das Potential dreifach belegter Flächen (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1920) soll im Text mit A., Wangerin, Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen (Leipzig 1909, 1921, Sammlung Schubert 58, 59, Bd. I und II) mit Bd. I, Bd. II bezeichnet werden.

Einleitung.

Die vorliegende Dissertation ist die Erweiterung einer Arbeit, die von der Philosophischen Fakultät der Universität Halle mit dem Preise gekrönt ist. Die in ihr behandelte Aufgabe ist eine doppelte: 1. Die von Wangerin abgeleiteten allgemeinen Sätze an speziellen Beispielen zu erläutern, und zwar an der Kugel und dem verlängerten Rotationsellipsoid; 2. die erwähnten Sätze für die Kugel zu verallgemeinern, indem statt der dreifach belegten vier-, fünf-, ... n-fach belegte Flächen untersucht werden. Die Ausführung dieser Arbeit wurde durch wertvolle Ratschläge der Herren Geheimer Regierungsrat Professor Dr. Gutzmer und Geheimer Regierungsrat Professor Dr. Wangerin gefördert.

I. Das Potential dreifach belegter Flächen.

§ 1. Das Potential einer dreifach belegten Kugelfläche.

Zur Berechnung des Potentials einer dreifach belegten Kugelfläche gehen wir von der Definition der dreifachen Belegung

$$(1) \qquad V + V_1 + V_2 = q \int\int m \, do \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{2}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \right)^{1)}$$

aus. Dabei bedeutet m das Moment der dreifachen Belegung, ϱ den Abstand eines Flächenpunktes ξ, η, ζ von dem Aufpunkt x, y, z, do das Flächenelement; der Faktor q hat für alle Flächenpunkte denselben Wert. Man setze

$$\frac{1}{\varrho} = \varphi(R), \quad \frac{1}{\varrho_1} = \varphi(R+\delta), \quad \frac{1}{\varrho_2} = \varphi(R+2\delta),$$

wobei R, $R+\delta$, $R+2\delta$ die Radien dreier konzentrischer Kugeln sind. Entwickelt man diese Glieder nach dem Taylorschen Satze, so erhält man für den Klammerausdruck in (1):

$$(2) \qquad \frac{1}{\varrho} - \frac{2}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \varphi''(R)\,\delta^2 + \varphi'''(R)\,\delta^3 + \ldots .$$

Zufolge (2) geht (1) über in

$$V + V_1 + V_2 = q \int\int m \, do \, (\varphi''(R)\,\delta^2 + \varphi'''(R)\,\delta^3 + \ldots).$$

Läßt man δ beliebig abnehmen und zugleich den Faktor q derart wachsen, daß

$$(3) \qquad \lim_{\delta \to 0} (q\,\delta^2) = 1$$

---

[1]) A. 179, (3); nur ist in obiger Formel die Reihenfolge der Flächen F, F_1, F_2 und dementsprechend die der Abstände ϱ, ϱ_1, ϱ_2. Diese Umstellung aber läßt das Resultat ungeändert.

wird, so ergibt sich

$$(4)\quad \lim_{\delta \to 0} (V + V_1 + V_2) = W = \int\int m\, do\, \varphi''(R) = \int\int m\, do\, \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial R^2}.$$

Dieser Grenzwert W stellt das Potential der dreifach mit Masse belegten Kugelfläche dar. Setzt man in (4) $do = R^2 \sin \vartheta_1\, d\vartheta_1\, d\varphi_1$ ein, so wird

$$(5)\quad W = R^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} m\, \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial R^2} \sin \vartheta_1\, d\vartheta_1\, d\varphi_1.$$

$R, \vartheta_1, \varphi_1$ sind die Polarkoordinaten des Flächenpunktes $Q\,(\xi, \eta, \zeta)$, während diejenigen des Aufpunktes $P\,(x, y, z)$ mit r, ϑ, φ bezeichnet werden sollen. Die Gleichung (5) hätte sich auch aus der Formel

$$W = \int\int \frac{m\, do}{\varrho^3} (-1 + 3 \cos^2 (\varrho, N))^{1)}$$

ableiten lassen.

In (5) ist das Moment m der dreifachen Belegung irgendeine gegebene Funktion von ϑ_1, φ_1, die von R unabhängig ist. Somit hat man, da auch die Integrationsgrenzen von R unabhängig sind, für die Kugel

$$(5\,a)\quad W = R^2 \frac{\partial^2}{\partial R^2} \left\{ \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{m \sin \vartheta_1\, d\vartheta_1\, d\varphi_1}{\varrho} \right\}.$$

In (5 a) ist das Integral das Potential einer einfach belegten Kugelfläche mit der Dichtigkeit m. Man kann darauf das für $\frac{V}{R^2}$ abgeleitete Resultat anwenden.[2]) Entwickelt man das gegebene Moment m nach Kugelfunktionen

$$(6)\quad m = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n (\vartheta_1, \varphi_1),$$

so folgt für äußere Punkte

$$W_a = R^2 \frac{\partial^2}{\partial R^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{R^n}{r^{n+1}} Y_n (\vartheta, \varphi) \right\},$$

[1]) A. 179.

[2]) Bd. II, 98.

für innere

$$W_i = R^2 \frac{\partial^2}{\partial R^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{r^n}{R^{n+1}} Y_n(\vartheta, \varphi) \right\},$$

d. h.

$$W_a = R^2 \sum_{n=0}^{\infty} 4\pi \frac{n(n-1)}{2n+1} \frac{R^{n-2}}{r^{n+1}} Y_n(\vartheta, \varphi),$$

$$W_i = R^2 \sum_{n=0}^{\infty} 4\pi \frac{(n+1)(n+2)}{2n+1} \frac{r^n}{R^{n+3}} Y_n(\vartheta, \varphi),$$

oder

(7 a)
$$W_a = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2n+1} \frac{R^n}{r^{n+1}} Y_n(\vartheta, \varphi),$$

(7 b)
$$W_i = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2n+1} \frac{r^n}{R^{n+1}} Y_n(\vartheta, \varphi).$$

Aus den Ausdrücken (7 a) und (7 b) folgt:

$$\lim_{r=R} (W_a - W_i) = \frac{4\pi}{R} \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\vartheta, \varphi) \left\{ \frac{n(n-1)}{2n+1} - \frac{(n+1)(n+2)}{2n+1} \right\}.$$

(8)
$$\lim_{r=R} (W_a - W_i) = -\frac{8\pi}{R} (m).$$

Dabei bedeutet (m) den Wert von m in dem Punkte Q, in dem der Aufpunkt durch die Fläche hindurchgeht. Gleichung (8) bestätigt die von Wangerin allgemein aufgestellte Formel

$$\frac{1}{4\pi} \lim (W_a - W_i) = -m \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).^{1})$$

Um die Änderung der normalen Ableitung von W beim Durchgang des Aufpunktes durch die belegte Fläche zu erhalten, bilde man

$$\lim_{r=R} \left(\frac{\partial W_a}{\partial r} - \frac{\partial W_i}{\partial r} \right).$$

Da

$$\frac{\partial W_a}{\partial r} = -4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)(n+1)}{2n+1} \frac{R^n}{r^{n+2}} Y_n(\vartheta, \varphi),$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial r} = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)(n+2)}{2n+1} \frac{r^{n-1}}{R^{n+1}} Y_n(\vartheta, \varphi)$$

---

[1]) A. 180.

ist, so wird

$$\lim_{r=R}\left(\frac{\partial W_a}{\partial r}-\frac{\partial W_i}{\partial r}\right) = -\frac{4\pi}{R^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{n(n-1)(n+1)}{2n+1}+\frac{n(n+1)(n+2)}{2n+1}\right\} Y_n(\vartheta,\varphi),$$

$$= -\frac{4\pi}{R^2}\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\vartheta,\varphi)\,\frac{2n^3+3n^2+n}{2n+1},$$

$$\lim_{r=R}\left(\frac{\partial W_a}{\partial r}-\frac{\partial W_i}{\partial r}\right) = -\frac{4\pi}{R^2}\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\vartheta,\varphi)\; n(n+1). \tag{9}$$

Zur Abkürzung setzen wir:

$$\Delta_1 Y_n(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial\,\sin\vartheta\,\dfrac{\partial Y_n(\vartheta,\varphi)}{\partial\vartheta}}{\partial\vartheta}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\,\frac{\partial^2 Y_n(\vartheta,\varphi)}{\partial\varphi^2}.$$

Dieser Ausdruck hat nach der Differentialgleichung der Kugelfunktion den Wert:

$$-n(n+1)\;Y_n(\vartheta,\varphi).^{1})$$

Zufolge der Gleichung (9) erhalten wir:

$$\lim_{r=R}\left(\frac{\partial W_a}{\partial r}-\frac{\partial W_i}{\partial r}\right) = -\frac{4\pi}{R^2}\,(-\Delta_1(m)) = \frac{4\pi}{R^2}\,\Delta_1(m).$$

Diese Gleichung zeigt, wie sich die normale Ableitung von W beim Durchgang des Aufpunktes durch die belegte Fläche ändert und bestätigt die allgemein von Wangerin aufgestellte Formel für die Änderung des Potentials beim Durchgang des Aufpunktes durch eine beliebige dreifach belegte Fläche.[2])

Die hier für die Kugel aufgestellten Sätze lassen sich auch mit Hilfe dipolarer Koordinaten ableiten.

§ 2. Das Potential eines dreifach belegten Rotationsellipsoides.

Das Potential einer dreifach belegten Fläche hat die Form:

$$W = \frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial U_2}{\partial y}+\frac{\partial U_3}{\partial z}.^{3}) \tag{1}$$

Es ist

$$U = -\int\int \mu\,\frac{\partial\,\frac{1}{\varrho}}{\partial N}\,do\,^{4})$$

[1]) Bd. II, 66. [2]) A. 184. [3]) A. 180. [4]) Bd. I, 153.

und

$$(2)\quad U_1 = -\int\int \alpha' m \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial N}\, do, \quad U_2 = -\int\int \beta' m \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial N}\, do,$$

$$U_3 = -\int\int \gamma' m \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial N}\, do.^{1})$$

Setzt man die Ausdrücke (2) in die Gleichung (1) ein, so ergibt sich:

$$W = -\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\int\int \alpha' m \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial N}\, do\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\int\int \beta' m \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial N}\, do\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\int\int \gamma' m \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial N}\, do\right)\right\},$$

$$= -\left\{\int\int \alpha' m \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial N}\right) do + \int\int \beta' m \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial N}\right) do + \int\int \gamma' m \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial N}\right) do\right\},$$

$$= -\left\{\int\int \alpha' m \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x}\right) do + \int\int \beta' m \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial y}\right) do + \int\int \gamma' m \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial z}\right) do\right\},$$

da N, α', β', γ' und m von x, y, z unabhängig sind. Da ferner

$$\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x} = -\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial y} = -\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial z} = -\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \zeta}$$

ist, so wird

$$(3)\quad W = \int\int \alpha' m \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi}\right) do + \int\int \beta' m \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \eta}\right) + \int\int \gamma' m \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \zeta}\right) do.$$

---

[1]) A. 180.

Beachten wir, daß

$$\frac{\partial f}{\partial N} = \alpha' \frac{\partial f}{\partial \xi} + \beta' \frac{\partial f}{\partial \eta} + \gamma' \frac{\partial f}{\partial \zeta}$$

ist, so erhält man bei der Ausführung der Differentiation in (3):

$$(4) \quad W = \int\int m\, d\sigma \left\{ \alpha'^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi^2} + \beta'^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial \eta^2} + \gamma'^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial \zeta^2} + 2\alpha'\beta' \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi\, \partial \eta} + 2\alpha'\gamma' \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi\, \partial \zeta} + 2\beta'\gamma' \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial \eta\, \partial \zeta} \right\}.$$

Für das Potential einer dreifach belegten Kugelfläche hatte sich ergeben:

$$W_{\text{Kugel}} = \int\int m \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial N^2}\, d\sigma.^1)$$

$$(5) \quad \left\{ W_{\text{Kugel}} = \int\int m\, d\sigma \left\{ \alpha'^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi^2} + \beta'^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial \eta^2} + \gamma'^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial \zeta^2} + 2\alpha'\beta' \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi\, \partial \eta} \right.\right.$$
$$\left.\left. + 2\alpha'\gamma' \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi\, \partial \zeta} + 2\beta'\gamma' \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial \eta\, \partial \zeta} + \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi} \frac{\partial \alpha'}{\partial N} + \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \eta} \frac{\partial \beta'}{\partial N} + \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \zeta} \frac{\partial \gamma'}{\partial N} \right\}.$$

Diese Gleichung stimmt für die Kugel mit (4) überein, denn für diese ist:

$$(6) \quad \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi} \frac{\partial \alpha'}{\partial N} + \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \eta} \frac{\partial \beta'}{\partial N} + \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \zeta} \frac{\partial \gamma'}{\partial N} = -\frac{1}{\varrho^2} \left\{ \alpha' \frac{\partial \alpha'}{\partial N} + \beta' \frac{\partial \beta'}{\partial N} + \gamma' \frac{\partial \gamma'}{\partial N} \right\} = 0.$$

Anders aber ist es beim Rotationsellipsoid, wobei die Glieder unter (6) nicht Null ergeben. Jedoch zur Untersuchung der Änderung des Potentials beim Durchgang des Aufpunktes durch die Fläche des dreifach belegten Rotationsellipsoides können wir auch von der Formel:

$$W' = \int\int m \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial N^2}\, d\sigma$$

ausgehen. Setzen wir:

---

[1]) Vgl. oben S. 3. In obiger Formel ist N statt R genommen. Bei geschlossenen Flächen ist N die äußere Normale, und diese ist bei der Kugel der Radius R.

$$W' = \int\int m\, do \left\{ \alpha'^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi^2} + \beta'^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial \eta^2} + \gamma'^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial \zeta^2} + 2\alpha'\beta' \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi\, \partial \eta} \right.$$
$$\left. + 2\alpha'\gamma' \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi\, \partial \zeta} + 2\beta'\gamma' \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial \eta\, \partial \zeta} + \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi} \frac{\partial \alpha'}{\partial N} + \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \eta} \frac{\partial \beta'}{\partial N} + \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \zeta} \frac{\partial \gamma'}{\partial N} \right\},$$

$$\overline{W} = \int\int m\, do \left(\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi} \frac{\partial \alpha'}{\partial N} + \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \eta} \frac{\partial \beta'}{\partial N} + \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \zeta} \frac{\partial \gamma'}{\partial N} \right),$$

so ist

$$W' = W + \overline{W},$$

also $W' \neq W$. Da aber die Werte, die $\overline{W}$ zu beiden Seite der Fläche annimmt, demselben Grenzwert zustreben, wenn der angezogene Punkt sich von außen oder von innen der anziehenden Fläche nähert, so wird

$$\lim (\overline{W}_a - \overline{W}_i) = 0$$

und infolgedessen ist

$$\lim (W_a' - W_i') = \lim (W_a - W_i).$$

Der Beweis für das Verschwinden von $\lim (\overline{W}_a - \overline{W}_i)$ gestaltet sich folgendermaßen: Wir betrachten

$$\overline{W} = \int\int m\, do \left(\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \xi} \frac{\partial \alpha'}{\partial N} + \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \eta} \frac{\partial \beta'}{\partial N} + \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial \zeta} \frac{\partial \gamma'}{\partial N} \right),$$

oder

$$\overline{W} = -\int\int m\, do \left(\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x} \frac{\partial \alpha'}{\partial N} + \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial y} \frac{\partial \beta'}{\partial N} + \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial z} \frac{\partial \gamma'}{\partial N} \right).$$

Da m, $\frac{\partial \alpha'}{\partial N}$, $\frac{\partial \beta'}{\partial N}$, $\frac{\partial \gamma'}{\partial N}$ von x, y, z unabhängig sind, können wir schreiben

$$\overline{W} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\int\int \frac{m \frac{\partial \alpha'}{\partial N}}{\varrho} do \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int\int \frac{m \frac{\partial \beta'}{\partial N}}{\varrho} do \right)$$
$$- \frac{\partial}{\partial z} \left(\int\int \frac{m \frac{\partial \gamma'}{\partial N}}{\varrho} do \right).$$

Die Integrale

$$\int\int \frac{m \frac{\partial \alpha'}{\partial N}}{\varrho} do = V_1, \int\int \frac{m \frac{\partial \beta'}{\partial N}}{\varrho} do = V_2, \int\int \frac{m \frac{\partial \gamma'}{\partial N}}{\varrho} do = V_3$$

können angesehen werden je als das Potential einer einfachen Belegung der Fläche mit Masse von der Dichtigkeit

$$m\frac{\partial\alpha'}{\partial N},\quad m\frac{\partial\beta'}{\partial N},\quad m\frac{\partial\gamma'}{\partial N}.$$

Ferner sind $\frac{\partial V_1}{\partial x}$, $\frac{\partial V_2}{\partial y}$, $\frac{\partial V_3}{\partial z}$ die X-, bezw. Y-, bezw. Z-Komponente der Anziehung der einfach belegten Fläche. Bildet man

$$\lim(\overline{W}_a-\overline{W}_i) = -\lim\left(\frac{\partial V_{a_1}}{\partial x}-\frac{\partial V_{i_1}}{\partial x}\right)-\lim\left(\frac{\partial V_{a_2}}{\partial y}-\frac{\partial V_{i_2}}{\partial y}\right)$$
$$-\lim\left(\frac{\partial V_{a_3}}{\partial z}-\frac{\partial V_{i_3}}{\partial z}\right),$$

so wird, da V_1, V_2, V_3 Potentiale einfach belegter Flächen sind,

$$\lim(\overline{W}_a-W_i) = -4\pi K_1\cos(N,x)-4\pi K_2\cos(N,y)-4\pi K_3\cos(N,z),$$
$$= -4\pi(m)\frac{\partial\alpha}{\partial N}\cos(N,x)-4\pi(m)\frac{\partial\beta}{\partial N}\cos(N,y)$$
$$-4\pi(m)\frac{\partial\gamma}{\partial N}\cos(N,z),^{1})$$
$$= -4\pi(m)\left(\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial N}+\beta\frac{\partial\beta}{\partial N}+\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial N}\right)=0,$$

denn es ist $\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial N}+\beta\frac{\partial\beta}{\partial N}+\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial N}=0.$

Hiermit ist unsere Behauptung bewiesen.

Mit Hilfe der Formel

$$W' = \int\int m\frac{\partial^2\frac{1}{\varrho}}{\partial N^2}\,do \tag{7}$$

berechnen wir das Potential eines verlängerten Rotationsellipsoides, dessen Oberflächenelement durch

$$do = \left(\sqrt{r_1^2-e^2\cos^2\vartheta_1}\,\sqrt{r_1^2-e^2}\right)_{r_1=a}\sin\vartheta_1\,d\vartheta_1\,d\varphi_1\ ^{2})$$

gegeben ist. Ferner ist

$$dN = l\,dr = \frac{\sqrt{r_1^2-e^2\cos^2\vartheta_1}}{\sqrt{r_1^2-e^2}}\,dr_1,^{3})$$

$$\frac{\partial\frac{1}{\varrho}}{\partial N} = \frac{\partial\frac{1}{\varrho}}{\partial r_1}\frac{\sqrt{r_1^2-e^2}}{\sqrt{r_1^2-e^2\cos^2\vartheta_1}},$$

[1]) α, β, γ sind die Richtungskosinus der Normalen N, wenn der Aufpunkt x, y, z in einen Flächenpunkt ξ, η, ζ fällt.

[2]) Bd. II, 165.

[3]) Bd. II, 5. 6. 157.

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial N^2} = \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial r_1^2} \frac{r_1^2 - e^2}{r_1^2 - e^2 \cos^2 \vartheta_1} + \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial r_1} \frac{r_1 e^2 \sin^2 \vartheta_1}{(r_1^2 - e^2 \cos^2 \vartheta_1)^2}.$$

Für die Fläche $r_1 = a$ ist

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial N^2} = \frac{a^2 - e^2}{a^2 - e^2 \cos^2 \vartheta_1} \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial r_1^2} \right)_{r_1 = a} + \frac{a e^2 \sin^2 \vartheta_1}{(a^2 - e^2 \cos^2 \vartheta_1)^2} \left(\frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial r_1} \right)_{r_1 = a}. \tag{9}$$

Mittels (8) und (9) ergibt sich aus (7):

$$\left\{ \begin{aligned} W' = & \int\int m \frac{\sqrt{a^2 - e^2}^3}{\sqrt{a^2 - e^2 \cos^2 \vartheta_1}} \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho}}{\partial r_1^2} \sin \vartheta_1 \, d\vartheta_1 \, d\varphi_1 \\ & + \int\int m \frac{a e^2 \sin^2 \vartheta_1 \sqrt{a^2 - e^2}}{\sqrt{a^2 - e^2 \cos^2 \vartheta_1}^3} \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial r_1} \sin \vartheta_1 \, d\vartheta_1 \, d\varphi_1 .^1) \end{aligned} \right. \tag{10}$$

Für äußere Punkte findet man:

$$\left\{ \begin{aligned} W'_a = & \sqrt{a^2 - e^2}^3 \int\int \frac{m}{\sqrt{a^2 - e^2 \cos^2 \vartheta_1}} \frac{\partial^2 \frac{1}{\varrho_a}}{\partial r_1^2} \sin \vartheta_1 \, d\vartheta_1 \, d\varphi_1 \\ & + a e^2 \sqrt{a^2 - e^2} \int\int \frac{m \sin^2 \vartheta_1}{\sqrt{a^2 - e^2 \cos^2 \vartheta_1}} \frac{\partial \frac{1}{\varrho_a}}{\partial r_1} \sin \vartheta_1 \, d\vartheta_1 \, d\varphi_1, \end{aligned} \right. \tag{11}$$

$$W'_a = W'_{a_1} + W'_{a_2}, \tag{11 a}$$

wobei W'_{a_1} das erste, W'_{a_2} das zweite Glied der rechten Seite von (11) bedeutet.

$\frac{1}{\varrho_a}$ besitzt die Entwicklung

$$\frac{1}{\varrho_a} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{n} h_{n,v} Q_{n,v} \left(\frac{r}{e} \right) P_{n,v} \left(\frac{r_1}{e} \right) P_{n,v} (\cos \vartheta) \, P_{n,v} (\cos \vartheta_1) \cdot \cos v (\varphi - \varphi_1).^2) \tag{12}$$

Hiermit folgt:

$$W'_{a_1} = \sqrt{a^2 - e^2}^3 \int\int m \frac{\sin \vartheta_1 \, d\vartheta_1 \, d\varphi_1}{\sqrt{a^2 - e^2 \cos^2 \vartheta_1}} \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} \left(\frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{n} h_{n,v} \cdot Q_{n,v} \left(\frac{r}{e} \right) P_{n,v} \left(\frac{r_1}{e} \right) P_{n,v} (\cos \vartheta) \, P_{n,v} (\cos \vartheta_1) \cos v (\varphi - \varphi_1) \right),$$

[1]) Natürlich ist nach Ausführung der Differentiation hier wie in allen folgenden Formeln $r_1 = a$ zu setzen.

[2]) Bd. II, 172.

$$W'_{a_1} = \sqrt{a^2 - e^2}^3 \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} \left\{ \int\int \frac{m}{\sqrt{a^2 - e^2 \cos^2 \vartheta_1}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{n} h_{n,v} Q_{n,v}\left(\frac{r}{e}\right) \right.\right.$$

$$\left.\left. \cdot P_{n,v}\left(\frac{r_1}{e}\right) P_{n,v}(\cos\vartheta)\, P_{n,v}(\cos\vartheta_1) \cos v(\varphi - \varphi_1) \right) \sin\vartheta_1\, d\vartheta_1\, d\varphi_1 \right\}.$$

Entwickelt man noch $m: \sqrt{a^2 - e^2 \cos^2 \vartheta_1}$ nach Kugelfunktionen

$$(13) \quad \frac{m}{\sqrt{a^2 - e^2 \cos^2 \vartheta_1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{u=0}^{m} P_{m,u}(\cos\vartheta) \left\{ A_{m,u} \cos(u,\varphi) \right.$$

$$\left. + B_{m,u} \sin(u,\varphi) \right\} = \sum_{m=0}^{\infty} S_m(\vartheta_1, \varphi_1),$$

so wird

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} W'_{a_1} = \sqrt{a^2 - e^2}^3 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} & \left\{ \sum_0^{\infty} S_m(\vartheta_1, \varphi_1) \right\} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{n} \frac{1}{e} h_{n,v} \right. \\ & \cdot Q_{n,v}\left(\frac{r}{e}\right) P_{n,v}(\cos\vartheta)\, P_{n,v}(\cos\vartheta_1) (\cos(v\varphi)\cos(v\varphi_1) \\ & \left. + \sin(v\varphi)\sin(v\varphi_1)) \frac{\partial^2 P_{n,v}\left(\frac{r_1}{e}\right)}{\partial r_1^2} \right\} \cdot \\ & \sin\vartheta_1\, d\vartheta_1\, d\varphi_1. \end{aligned} \right.$$

Setzt man

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{n} \left\{ h_{n,v} Q_{n,v}\left(\frac{r}{e}\right) P_{n,v}(\cos\vartheta)\, P_{n,v}(\cos\vartheta_1) \frac{\partial^2 P_{n,v}\left(\frac{r_1}{e}\right)}{\partial r_2^2} \right. \\ & \left. \cdot (\cos(v\varphi)\cos(v\varphi_1) + \sin(v\varphi)\sin(v\varphi_1)) \right\} \\ = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{n} P_{n,v}(\cos\vartheta_1) \{ C_{n,v} \cos(v\varphi_1) + D_{n,v} \sin(v\varphi_1) \} \\ = & \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(\vartheta_1, \varphi_1), \end{aligned} \right.$$

wobei

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} C_{n,v} &= h_{n,v} Q_{n,v}\left(\frac{r}{e}\right) P_{n,v}(\cos\vartheta) \frac{\partial^2 P_{n,v}\left(\frac{r_1}{e}\right)}{\partial r_1^2} \cos(v\varphi), \\ D_{n,v} &= h_{n,v} Q_{n,v}\left(\frac{r}{e}\right) P_{n,v}(\cos\vartheta) \frac{\partial^2 P_{n,v}\left(\frac{r_1}{e}\right)}{\partial r_1^2} \sin(v\varphi) \end{aligned} \right.$$

bedeuten, so wird

$$(17)\quad W'_{a_1} = \frac{\sqrt{a^2 - e^2}^3}{e} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left\{\sum_{m=0}^{\infty} S_m(\vartheta_1, \varphi_1)\right\} \left\{\sum_{n=0}^{\infty} Z_n(\vartheta_1, \varphi_1)\right\} \cdot \sin\vartheta_1 \, d\vartheta_1 \, d\varphi_1.$$

Da die beiden hier auftretenden Reihen konvergent sind, kann man sie gliedweise multiplizieren und darauf gliedweise integrieren. Dadurch erhält man Integrale von der Form:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\pi} S_m(\vartheta_1, \varphi_1)\, Z_n(\vartheta_1, \varphi_1) \sin\vartheta_1 \, d\vartheta_1 \, d\varphi_1,$$

die nach den Integralsätzen der allgemeinen Kugelfunktionen für $m \gtrless n$ verschwinden, dagegen für $m = n$ den Wert

$$(18)\quad \frac{4\pi}{2n+1}\left\{\frac{A_o C_o}{h_{n,o}} + \sum_{v=1}^{n} \frac{A_v C_v + B_v D_v}{h_{n,v}}\right\}$$ [1])

haben. Demnach erhält man:

$$(19)\quad W'_{a_1} = \frac{\sqrt{a^2 - e^2}^3}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1}\left\{\frac{A_{n,o} C_{n,o}}{h_{n,o}} + \sum_{v=1}^{n} \frac{A_{n,v} C_{n,v} + B_{n,v} D_{n,v}}{h_{n,v}}\right\}.$$

Die Berechnung von

$$W'_{a_2} = \int\int m \, \frac{a e^2 \sin^2\vartheta_1 \sqrt{a^2 - e^2}}{\sqrt{a^2 - e^2\cos^2\vartheta_1}^3} \frac{\partial \dfrac{1}{\varrho_a}}{\partial r_1} \sin\vartheta_1 \, d\vartheta_1 \, d\varphi_1$$

ergibt sich folgendermaßen:

Mit Hilfe der Gleichung (12) geht W'_{a_2} über in:

$$W'_{a_2} = a e^2 \sqrt{a^2 - e^2} \int\int \left\{ m \, \frac{\sin^2\vartheta_1}{\sqrt{a^2 - e^2\cos^2\vartheta_1}^3} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{n} \frac{1}{e} h_{n,v} \cdot Q_{n,v}\left(\frac{r}{e}\right) \frac{\partial P_{n,v}\left(\frac{r_1}{e}\right)}{\partial r_1} P_{n,v}(\cos\vartheta)\, P_{n,v}(\cos\vartheta_1) \cos v(\varphi - \varphi_1)\right\} \sin\vartheta_1 \, d\vartheta_1 \, d\varphi_1.$$

Entwickelt man hier $m \sin^2\vartheta_1 : \sqrt{a^2 - e^2\cos^2\vartheta_1}^3$ nach Kugelfunktionen

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{m \sin^2\vartheta_1}{\sqrt{a^2 - e^2\cos^2\vartheta_1}^3} &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{u=0}^{m} P_{m,u}(\cos\vartheta_1)\{A'_{m,u}\cos(u\varphi_1) \\ &\qquad + B'_{m,u}\sin(u\varphi_1)\}, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} X_m(\vartheta_1, \varphi_1), \end{aligned}\right.$$

[1]) Bd. II, 78.

so wird

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} W'_{a_2} = a\,e^2\sqrt{a^2-e^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}&\left\{\sum_{m=0}^{\infty} H_m(\vartheta_1,\varphi_1)\right\}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{n}\frac{1}{e}\,h_{n,v}\right.\\ &\cdot Q_{n,v}\left(\frac{r}{e}\right)\frac{\partial P_{n,v}\left(\frac{r_1}{e}\right)}{\partial r_1}\,P_{n,v}(\cos\vartheta)\,P_{n,v}(\cos\vartheta_1)\cos(v\varphi)\cos(v\varphi_1)\\ &\left.+\sin(v\varphi)\sin(v\varphi_1)\right\}\sin\vartheta_1\,d\vartheta_1\,d\varphi_1. \end{aligned}\right.$$

Setzt man nun

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{n}\left\{h_{n,v}\,Q_{n,v}\left(\frac{r}{e}\right)\frac{\partial P_{n,v}\left(\frac{r_1}{e}\right)}{\partial r_1}\,P_{n,v}(\cos\vartheta)\,P_{n,v}(\cos\vartheta_1)\right.\\ &\qquad\left.\cdot(\cos(v\varphi)\cos(v\varphi_1)+\sin(v\varphi)\sin(v\varphi_1))\right\}\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{n}P_{n,v}(\cos\vartheta_1)\{C'_{n,v}\cos(v\varphi_1)+D'_{n,v}\sin(v\varphi_1)\}\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}Y_n(\vartheta_1,\varphi_1), \end{aligned}\right.$$

wobei

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} C'_{n,v} &= h_{n,v}\,Q_{n,v}\left(\frac{r}{e}\right)\frac{\partial P_{n,v}\left(\frac{r_1}{e}\right)}{\partial r_1}\,P_{n,v}(\cos\vartheta)\cos(v\varphi),\\ D'_{n,v} &= h_{n,v}\,Q_{n,v}\left(\frac{r}{e}\right)\frac{\partial P_{n,v}\left(\frac{r_1}{e}\right)}{\partial r_1}\,P_{n,v}(\cos\vartheta)\sin(v\varphi) \end{aligned}\right.$$

bedeuten, so folgt

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} W'_{a_2} = a\,e\sqrt{a^2-e^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}&\left\{\sum_{m=0}^{\infty}X_m(\vartheta_1,\varphi_1)\right\}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}Y_n(\vartheta_1,\varphi_1)\right\}\\ &\cdot\sin\vartheta_1\,d\vartheta_1\,d\varphi_1, \end{aligned}\right.$$

durch Ausführung der Integration unter Beachtung von (18):

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} W'_{a_2} = a\,e\sqrt{a^2-e^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4\pi}{2n+1}&\left\{\frac{A'_{n,0}\,C'_{n,0}}{h_{n,0}}\right.\\ &\left.+\sum_{v=1}^{n}\frac{A'_{n,v}\,C'_{n,v}+B'_{n,v}\,D'_{n,v}}{h_{n,v}}\right\}. \end{aligned}\right.$$

Es ist $W'_a = W'_{a_1} + W'_{a_2}$.

also

$$W'_a = \sqrt{a^2 - e^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \left\{ \frac{1}{h_{n,o}} \left[\frac{a^2 - e^2}{e} A_{n,o} C_{n,o} + a e A'_{n,o} C''_{n,o} \right] + \sum_{v=1}^{n} \frac{1}{h_{n,v}} \left[\frac{a^2 - e^2}{e} (A_{n,v} C_{n,v} + B_{n,v} D_{n,v}) + a e (A'_{n,v} C''_{n,v} + B'_{n,v} D''_{n,v}) \right] \right\}.$$

Durch Einsetzung der Ausdrücke $C_{n,o}$, $C''_{n,o}$, $C_{n,v}$, $D_{n,v}$, $C''_{n,v}$, $D''_{n,v}$ unter (16) und (23) folgt:

$$W'_a = \sqrt{a^2 - e^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \left\{ \left[\frac{a^2 - e^2}{e} A_{n,o} \frac{\partial^2 P_{n,o}\left(\frac{r_1}{e}\right)}{\partial r_1^2} + a e A'_{n,o} \cdot \frac{\partial P_{n,o}\left(\frac{r_1}{e}\right)}{\partial r_1} \right] Q_{n,o}\left(\frac{r}{e}\right) P_{n,o}(\cos\vartheta) + \sum_{v=1}^{n} \left[\frac{a^2 - e^2}{e} (A_{n,v} \cos(v\varphi) + B_{n,v} \sin(v\varphi)) Q_{n,v}\left(\frac{r}{e}\right) P_{n,v}(\cos\vartheta) \frac{\partial^2 P_{n,v}\left(\frac{r_1}{e}\right)}{\partial r_1^2} + a e (A'_{n,v} \cos(v\varphi) + B'_{n,v} \sin(v\varphi)) Q_{n,v}\left(\frac{r}{e}\right) P_{n,v}(\cos\vartheta) \frac{\partial P_{n,v}\left(\frac{r_1}{e}\right)}{\partial r_1} \right] \right\},$$

$$(26) \quad \begin{cases} W'_a = \sqrt{a^2 - e^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{n} \frac{4\pi}{2n+1} \left[\frac{a^2 - e^2}{e^3} (A_{n,v} \cos(v\varphi) \right. \\ + B_{n,v} \sin(v\varphi)) Q_{n,v}\left(\frac{r}{e}\right) P_{n,v}(\cos\vartheta) \frac{\partial^2 P_{n,v}\left(\frac{r_1}{e}\right)}{\partial\left(\frac{r_1}{e}\right)^2} + a (A'_{n,v} \cos(v\varphi) \\ \left. + B'_{n,v} \sin(v\varphi)) Q_{n,v}\left(\frac{r}{e}\right) P_{n,v}(\cos\vartheta) \frac{\partial P_{n,v}\left(\frac{r_1}{e}\right)}{\partial\left(\frac{r_1}{e}\right)} \right]. \end{cases}$$

Für W_i' ist die Rechnung ganz analog durchzuführen, nur muß $\frac{1}{\varrho_i}$ statt $\frac{1}{\varrho_a}$ genommen werden. $\frac{1}{\varrho_i}$ unterscheidet sich von $\frac{1}{\varrho_a}$ dadurch, daß r mit r_1 vertauscht worden ist. Man erhält demnach:

$$(27)\quad \left\{ W'_i = \sqrt{a^2 - e^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} \frac{4\pi}{2n+1} \left[\frac{a^2 - e^2}{e^3} (A_{n,r} \cos(r\varphi) + B_{n,r} \cdot \sin(r\varphi)) P_{n,r}\left(\frac{r}{e}\right) P_{n,r}(\cos\vartheta) \frac{\partial^2 Q_{n,r}\left(\frac{r_1}{e}\right)}{\partial\left(\frac{r_1}{e}\right)^2} + a (A'_{n,r} \cos(r\varphi) + B'_{n,r} \sin(r\varphi)) P_{n,r}\left(\frac{r}{e}\right) P_{n,r}(\cos\vartheta) \frac{\partial Q_{n,r}\left(\frac{r_1}{e}\right)}{\partial\left(\frac{r_1}{e}\right)} \right] . \right.$$

Aus den Ausdrücken (26) und (27) folgt:

$$(28)\quad \left\{ \lim_{r=r_1=a} (W'_a - W'_i) = \sqrt{a^2 - e^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} \frac{4\pi}{2n+1} \left[\frac{a^2 - e^2}{e^3} \left(A_{n,r} \cos(r\varphi) + B_{n,r} \sin(r\varphi)) P_{n,r}(\cos\vartheta) Q_{n,r}\left(\frac{r_1}{e}\right) \frac{\partial^2 P_{n,r}\left(\frac{r_1}{e}\right)}{\partial\left(\frac{r_1}{e}\right)^2} - P_{n,r}\left(\frac{r_1}{e}\right) \frac{\partial^2 Q_{n,r}\left(\frac{r_1}{e}\right)}{\partial\left(\frac{r_1}{e}\right)^2} \right) + a (A'_{n,r} \cos(r\varphi) + B'_{n,r} \sin(r\varphi)) \cdot P_{n,r}(\cos\vartheta) \left(Q_{n,r}\left(\frac{r_1}{e}\right) \frac{\partial P_{n,r}\left(\frac{r_1}{e}\right)}{\partial\left(\frac{r_1}{e}\right)} - P_{n,r}\left(\frac{r_1}{e}\right) \frac{\partial Q_{n,r}\left(\frac{r_1}{e}\right)}{\partial\left(\frac{r_1}{e}\right)} \right) \right] . \right.$$

Um den Ausdruck

$$Q_{n,r}\left(\frac{r_1}{e}\right) \frac{\partial^2 P_{n,r}\left(\frac{r_1}{e}\right)}{\partial\left(\frac{r_1}{e}\right)^2} - P_{n,r}\left(\frac{r_1}{e}\right) \frac{\partial^2 Q_{n,r}\left(\frac{r_1}{e}\right)}{\partial\left(\frac{r_1}{e}\right)^2}$$

zu vereinfachen, benutzen wir die Heinesche Formel:

$$(29)\quad Q_{n,r}(x) \frac{\partial P_{n,r}(x)}{\partial x} - P_{n,r}(x) \frac{\partial Q_{n,r}(x)}{\partial x} = -\frac{2n+1}{x^2-1} ,^{1})$$

die nach einmaliger Differentiation nach x

$$(30)\quad Q_{n,r}(x) \frac{\partial^2 P_{n,r}(x)}{\partial x^2} - P_{n,r}(x) \frac{\partial^2 Q_{n,r}(x)}{\partial x^2} = -\frac{2x(2n+1)}{(x^2-1)^2}$$

[1]) Heine, Anwendungen der Kugelfunktionen, Berlin 1881, Bd. II, S. 115.

ergibt. Benutzt man die Ausdrücke (29) und (30) und beachtet, daß $r_1 = a$ gesetzt ist, so geht die Gleichung (28) über in:

$$(31)\quad \left\{ \begin{aligned} \lim_{r=r_1=a} (W'_a - W'_i) = \sqrt{a^2 - e^2}\, 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \Big\{ & -\frac{2a}{a^2 - e^2} P_{n,\nu}(\cos\vartheta) \\ & \cdot [A_{n,\nu} \cos(\nu\varphi) + B_{n,\nu} \sin(\nu\varphi)] + \frac{a e^2}{a^2 - e^2} P_{n,\nu}(\cos\vartheta) \\ & \cdot [A'_{n,\nu} \cos(\nu\varphi) + B'_{n,\nu} \sin(\nu\varphi)] \Big\}. \end{aligned} \right.$$

Mit Hilfe der Gleichungen (13) und (20) wird

$$(32)\quad \left\{ \begin{aligned} \lim_{r=r_1=a} (W'_a - W'_i) &= \sqrt{a^2 - e^2}\, 4\pi \left\{ -\frac{2a}{a^2 - e^2} \frac{(m)}{\sqrt{a^2 - e^2 \cos^2\vartheta}} \right. \\ &\qquad \left. + \frac{a e^2}{a^2 - e^2} \frac{(m) \sin^2\vartheta}{\sqrt{a^2 - e^2 \cos^2\vartheta}^3} \right\}, \\ &= -4\pi (m) \frac{2a(a^2 - e^2\cos^2\vartheta) - a e^2 \sin^2\vartheta}{\sqrt{a^2 - e^2}\, \sqrt{a^2 - e^2\cos^2\vartheta}^3}, \end{aligned} \right.$$

oder wegen $e^2 = a^2 - c^2$:

$$(33)\quad \lim_{r=r_1=a} (W'_a - W'_i) = -4\pi (m) \frac{2ac^2 + a(a^2 - c^2)\sin^2\vartheta}{c\sqrt{c^2 + (a^2 - c^2)\sin^2\vartheta}^3}.$$

Da nach S. 8 $\lim (W'_a - W'_i) = \lim (W_a - W_i)$ ist, so ist also

$$\frac{1}{4\pi} \lim (W_a - W_i) = -m \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$ [1])

denn nach einer bekannten Formel der Differentialgeometrie ist für das Rotationsellipsoid

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2ac^2 + a(a^2 - c^2)\sin^2\vartheta}{c\sqrt{c^2 + (a^2 - c^2)\sin^2\vartheta}^3}.$$

Die Gleichung (33) zeigt, wie sich das Potential eines verlängerten Rotationsellipsoides beim Durchgang des Aufpunktes durch die belegte Fläche ändert und bestätigt die allgemein von Wangerin aufgestellte Formel für die Änderung des Potentials beim Durchgang des Aufpunktes durch eine beliebige dreifach belegte Fläche.

Um die Änderung der normalen Ableitung von W beim Durchgang des Aufpunktes durch die belegte Fläche zu erhalten, bilde man $\lim \left(\frac{\partial W_a}{\partial N} - \frac{\partial W_i}{\partial N} \right)$. Wegen $W = W' - \bar{W}$ (S. 8) wird:

[1]) **A.**, 180.

$$\lim\left(\frac{\partial W_a}{\partial N}-\frac{\partial W_i}{\partial N}\right)=\lim\left(\frac{\partial W'_a}{\partial N}-\frac{\partial W'_i}{\partial N}\right)-\lim\left(\frac{\partial \overline{W}_a}{\partial N}-\frac{\partial \overline{W}_i}{\partial N}\right).$$

Wir berechnen zunächst $\lim\left(\frac{\partial W'_a}{\partial N}-\frac{\partial W'_i}{\partial N}\right)$. Aus den Gleichungen (26) und (27) ergibt sich durch Differentiation:

$$\frac{\partial W'_a}{\partial N}=\frac{1}{l}\frac{\partial W'_a}{\partial r},$$

$$(34)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial W'_a}{\partial N}=\dfrac{\sqrt{r^2-e^2}\sqrt{a^2-e^2}}{\sqrt{r^2-e^2\cos^2\vartheta}}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{4\pi}{2n+1}\Big\{\frac{a^2-e^2}{e^3}(A_{n,\nu}\cos(\nu\varphi) \\ +B_{n,\nu}\sin(\nu\varphi))\dfrac{\partial Q_{n,\nu}\left(\frac{r}{e}\right)}{\partial r}\dfrac{\partial^2 P_{n,\nu}\left(\frac{r_1}{e}\right)}{\partial\left(\frac{r_1}{e}\right)^2}P_{n,\nu}(\cos\vartheta)+a(A'_{n,\nu}\cos(\nu\varphi) \\ +B'_{n,\nu}\sin(\nu\varphi))\dfrac{\partial Q_{n,\nu}\left(\frac{r}{e}\right)}{\partial r}\dfrac{\partial P_{n,\nu}\left(\frac{r_1}{e}\right)}{\partial\left(\frac{r_1}{e}\right)}P_{n,\nu}(\cos\vartheta)\Big\}, \end{cases}$$

$$\frac{\partial W'_i}{\partial N}=\frac{1}{l}\frac{\partial W'_i}{\partial r},$$

$$(35)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial W'_i}{\partial N}=\dfrac{\sqrt{r^2-e^2}\sqrt{a^2-e^2}}{\sqrt{r^2-e^2\cos^2\vartheta}}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{4\pi}{2n+1}\Big\{\frac{a^2-e^2}{e^3}(A_{n,\nu}\cos(\nu\varphi) \\ +B_{n,\nu}\sin(\nu\varphi))\dfrac{\partial P_{n,\nu}\left(\frac{r}{e}\right)}{\partial r}\dfrac{\partial^2 Q_{n,\nu}\left(\frac{r_1}{e}\right)}{\partial\left(\frac{r_1}{e}\right)^2}P_{n,\nu}(\cos\vartheta)+a(A'_{n,\nu}\cos(\nu\varphi) \\ +B'_{n,\nu}\sin(\nu\varphi))\dfrac{\partial P_{n,\nu}\left(\frac{r}{e}\right)}{\partial r}\dfrac{\partial Q_{n,\nu}\left(\frac{r_1}{e}\right)}{\partial\left(\frac{r_1}{e}\right)}P_{n,\nu}(\cos\vartheta)\Big\}. \end{cases}$$

Mittels der Gleichungen (34) und (35) erhält man:

$$(36)\quad \begin{cases} \lim\limits_{r=r_1=a}\left(\dfrac{\partial W'_a}{\partial N}-\dfrac{\partial W'_i}{\partial N}\right)=\dfrac{a^2-e^2}{\sqrt{a^2-e^2\cos^2\vartheta}}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{4\pi}{2n+1}\Big\{\frac{a^2-e^2}{e^4} \\ \cdot(A_{n,\nu}\cos(\nu\varphi)+B_{n,\nu}\sin(\nu\varphi))\,P_{n,\nu}(\cos\vartheta) \\ \cdot\left[\dfrac{\partial Q_{n,\nu}\left(\frac{a}{e}\right)}{\partial\left(\frac{a}{e}\right)}\dfrac{\partial^2 P_{n,\nu}\left(\frac{a}{e}\right)}{\partial\left(\frac{a}{e}\right)^2}-\dfrac{\partial P_{n,\nu}\left(\frac{a}{e}\right)}{\partial\left(\frac{a}{e}\right)}\dfrac{\partial^2 Q_{n,\nu}\left(\frac{a}{e}\right)}{\partial\left(\frac{a}{e}\right)^2}\right]\Big\}. \end{cases}$$

Um den Ausdruck

$$\frac{\partial Q_{n,\nu}\left(\frac{a}{e}\right)}{\partial\left(\frac{a}{e}\right)}\,\frac{\partial^2 P_{n,\nu}\left(\frac{a}{e}\right)}{\partial\left(\frac{a}{e}\right)^2}-\frac{\partial P_{n,\nu}\left(\frac{a}{e}\right)}{\partial\left(\frac{a}{e}\right)}\,\frac{\partial^2 Q_{n,\nu}\left(\frac{a}{e}\right)}{\partial\left(\frac{a}{e}\right)^2}$$

zu bestimmen, multipliziere man die Differentialgleichung für $P_{n,\nu}(x)$ [1]) mit $\frac{\partial Q_{n,\nu}(x)}{\partial x}$ und diejenige für $Q_{n,\nu}(x)$ [1]) mit $\frac{\partial P_{n,\nu}(x)}{\partial x}$ und subtrahiere die letztere Gleichung von der ersteren. Dann wird

$$(x^2-1)\left(\frac{\partial^2 P_{n,\nu}(x)}{\partial x^2}\,\frac{\partial Q_{n,\nu}(x)}{\partial x}-\frac{\partial^2 Q_{n,\nu}(x)}{\partial x^2}\,\frac{\partial P_{n,\nu}(x)}{\partial x}\right)$$
$$-\left(n(n+1)+\frac{\nu^2}{x^2-1}\right)\left(P_{n,\nu}(x)\,\frac{\partial Q_{n,\nu}(x)}{\partial x}-Q_{n,\nu}(x)\,\frac{\partial P_{n,\nu}(x)}{\partial x}\right)=0,$$

oder wegen

$$P_{n,\nu}(x)\,\frac{\partial Q_{n,\nu}(x)}{\partial x}-Q_{n,\nu}(x)\,\frac{\partial P_{n,\nu}(x)}{\partial x}=-\frac{2n+1}{x^2-1},$$ [2])

$$\frac{\partial^2 P_{n,\nu}(x)}{\partial x^2}\,\frac{\partial Q_{n,\nu}(x)}{\partial x}-\frac{\partial^2 Q_{n,\nu}(x)}{\partial x^2}\,\frac{\partial P_{n,\nu}(x)}{\partial x}$$
$$=-\left(\frac{n(n+1)}{(x^2-1)^2}+\frac{\nu^2}{(x^2-1)^3}\right)(2n+1). \tag{37}$$

Mit Hilfe der Gleichung (37) geht (36) über in:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{r=r_1=a}\left(\frac{\partial W'_a}{\partial N}-\frac{\partial W_i'}{\partial N}\right)&=-\frac{a^2-e^2}{\sqrt{a^2-e^2\cos^2\vartheta}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n}\\ &\cdot 4\pi\left\{\left(A_{n,\nu}\cos(\nu\varphi)+B_{n,\nu}\sin(\nu\varphi)\right)P_{n,\nu}(\cos\vartheta)\,\frac{n(n+1)}{a^2-e^2}\right.\\ &\left.+\left(A_{n,\nu}\cos(\nu\varphi)+B_{n,\nu}\sin(\nu\varphi)\right)P_{n,\nu}(\cos\vartheta)\,\frac{\nu^2 e^2}{(a^2-e^2)^2}\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Beachten wir, daß

$$\nu^2 P_{n,\nu}(\cos\vartheta)\,\left(A_{n,\nu}\cos(\nu\varphi)+B_{n,\nu}\sin(\nu\varphi)\right)$$
$$=-\frac{\partial^2\left(P_{n,\nu}(\cos\vartheta)\,\left(A_{n,\nu}\cos(\nu\varphi)+B_{n,\nu}\sin(\nu\varphi)\right)\right)}{\partial\varphi^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n}P_{n,\nu}(\cos\vartheta)\left(A_{n,\nu}\cos(\nu\varphi)+B_{n,\nu}\sin(\nu\varphi)\right)=\frac{m}{\sqrt{a^2-e^2\cos^2\vartheta}}$$ [3])

---

[1]) Bd. II, 57.

[2]) Heine, Anwendungen der Kugelfunktionen, Bd. II S. 115.

[3]) Vgl. oben S. 11.

ist, so wird

$$(39)\quad \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{n} v^2 P_{n,v}(\cos\vartheta)\,(A_{n,v}\cos(v\varphi) + B_{n,v}\sin(v\varphi)) \right. \\ \left. = -\frac{\partial^2\left(\frac{m}{\sqrt{a^2-e^2\cos^2\vartheta}}\right)}{\partial\varphi^2}; \right.$$

ferner setzen wir:

$$\sum_{v=0}^{n} P_{n,v}(\cos\vartheta)\,(A_{n,v}\cos(v\varphi) + B_{n,v}\sin(v\varphi)) = y_n$$

und benutzen die partielle Differentialgleichung für die Kugelfunktion y_n:

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\sin\vartheta\,\frac{\partial y_n}{\partial\vartheta}}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 y_n}{\partial\varphi^2} + n(n+1)\,y_n = 0.$$ [1])

Summiert man diese Gleichung nach y_n, so erhält man:

$$(40)\quad \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)\,y_n = -\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\sin\vartheta\,\frac{\partial\sum_{n=0}^{\infty} y_n}{\partial\vartheta}}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\sum_{n=0}^{\infty} y_n}{\partial\varphi^2} \right),$$

und hier ist

$$(40\,a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} y_n = \frac{m}{\sqrt{a^2-e^2\cos^2\vartheta}}.$$

Mittels der Gleichungen (39) und (40) wird:

$$\lim_{r=r_1=a}\left(\frac{\partial W'_a}{\partial N} - \frac{\partial W'_i}{\partial N}\right) = -\frac{a^2-e^2}{\sqrt{a^2-e^2\cos^2\vartheta}}\,4\pi \\ \left\{ -\frac{1}{a^2-e^2}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{m}{\sqrt{a^2-e^2\cos^2\vartheta}}\right)\right)}{\partial\vartheta} \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\left(\frac{m}{\sqrt{a^2-e^2\cos^2\vartheta}}\right)}{\partial\varphi^2} \right) - \frac{e^2}{(a^2-e^2)^2}\frac{\partial^2\left(\frac{m}{\sqrt{a^2-e^2\cos^2\vartheta}}\right)}{\partial\varphi^2} \right\}$$

oder wegen

$$l = \frac{\sqrt{r^2-e^2\cos^2\vartheta}}{\sqrt{r^2-e^2}},\quad l_1 = \sqrt{r^2-e^2\cos^2\vartheta},\quad l_2 = \sqrt{r^2-e^2}\,\sin\vartheta$$ [2])

[1]) Bd. II, 72.

[2]) Bd. II, 157.

$$(41)\quad \left\{ \lim_{r=r_1=a} \left(\frac{\partial W'_a}{\partial N} - \frac{\partial W'_i}{\partial N} \right) = 4\pi \frac{1}{l_1 l_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{l_2}{l_1} \frac{\partial m}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{l_1}{l_2} \frac{\partial m}{\partial \varphi} \right) \right. \right.$$
$$\left. \left. - \sqrt{a^2 - e^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{e^2 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta m}{\sqrt{a^2 - e^2 \cos^2 \vartheta^3}} \right) \right\} \right.$$

Die Berechnung von $\lim \left(\frac{\partial \overline{W}_a}{\partial N} - \frac{\partial \overline{W}_i}{\partial N} \right)$ ergibt sich folgendermaßen:

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial N} = \frac{\partial \overline{W}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial N} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial N} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial N} = \alpha \frac{\partial \overline{W}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \overline{W}}{\partial z},$$

oder wegen $\overline{W} = -\left(\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} \right)$ [1]

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial N} = -\left\{ \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} \right) + \beta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} \right) \right.$$
$$\left. + \gamma \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} \right) \right\},$$

$$(42)\quad \left\{ \frac{\partial \overline{W}}{\partial N} = -\left\{ \alpha \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2 V_3}{\partial z^2} + \alpha \frac{\partial^2 V_2}{\partial x \partial y} + \alpha \frac{\partial^2 V_3}{\partial x \partial z} \right. \right.$$
$$\left. \left. + \beta \frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial y} + \beta \frac{\partial^2 V_3}{\partial y \partial z} + \gamma \frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial z} + \gamma \frac{\partial^2 V_2}{\partial y \partial z} \right\} \right.$$

Es ist

$$\lim \left(\frac{\partial V_a}{\partial x} - \frac{\partial V_i}{\partial x} \right) + 4\pi k\alpha = 0.$$ [2]

Ist φ eine Funktion der Koordinaten, die für alle Punkte einer gegebenen Fläche den Wert Null hat, so ist bekanntlich

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \alpha : \beta : \gamma.$$

Wendet man diese Proportion auf

$$\varphi = \lim \left(\frac{\partial V_a}{\partial x} - \frac{\partial V_i}{\partial x} \right) + 4\pi k\alpha$$

an, so erhält man:

---

[1]) Vgl. oben S. 8. [2]) Bd. I, 89.

$$\begin{cases} \lim\left(\frac{\partial^2 V_a}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2}\right) + 4\pi \frac{\partial (k\alpha)}{\partial x} = M\alpha, & \lim\left(\frac{\partial^2 V_a}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2}\right) + 4\pi \frac{\partial (k\beta)}{\partial y} = N\beta, \\ \lim\left(\frac{\partial^2 V_a}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 V_i}{\partial z^2}\right) + 4\pi \frac{\partial (k\gamma)}{\partial z} = P\gamma, & \lim\left(\frac{\partial^2 V_a}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 V_i}{\partial x\,\partial y}\right) + 4\pi \frac{\partial (k\alpha)}{\partial y} = M\beta, \\ \lim\left(\frac{\partial^2 V_a}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 V_i}{\partial x\,\partial z}\right) + 4\pi \frac{\partial (k\alpha)}{\partial z} = M\gamma, & \lim\left(\frac{\partial^2 V_a}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 V_i}{\partial x\,\partial y}\right) + 4\pi \frac{\partial (k\beta)}{\partial x} = N\alpha, \\ \lim\left(\frac{\partial^2 V_a}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 V_i}{\partial y\,\partial z}\right) + 4\pi \frac{\partial (k\beta)}{\partial z} = N\gamma, & \lim\left(\frac{\partial^2 V_a}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 V_i}{\partial x\,\partial z}\right) + 4\pi \frac{\partial (k\gamma)}{\partial x} = P\alpha, \\ \lim\left(\frac{\partial^2 V_a}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 V_i}{\partial y\,\partial z}\right) + 4\pi \frac{\partial (k\gamma)}{\partial y} = P\beta. \end{cases}$$

Durch Gleichsetzung der Ausdrücke für $\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}$ etc. ergibt sich:

$$(44)\quad \begin{cases} M\beta - N\alpha = 4\pi\left(\frac{\partial (k\alpha)}{\partial y} - \frac{\partial (k\beta)}{\partial x}\right), \\ P\alpha - M\gamma = 4\pi\left(\frac{\partial (k\gamma)}{\partial x} - \frac{\partial (k\alpha)}{\partial z}\right), \\ N\gamma - P\beta = 4\pi\left(\frac{\partial (k\beta)}{\partial z} - \frac{\partial (k\gamma)}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Aus den drei ersten Gleichungen (43) folgt:

$$M\alpha + N\beta + P\gamma = \lim(\Delta V_a - \Delta V_i) + 4\pi\left\{\frac{\partial (k\alpha)}{\partial x} + \frac{\partial (k\beta)}{\partial y} + \frac{\partial (k\gamma)}{\partial z}\right\},$$

oder wegen $\Delta V_a = 0, \quad \Delta V_i = 0,$[1])

$$(45)\qquad M\alpha + N\beta + P\gamma = 4\pi\left(\frac{\partial k}{\partial N} + kS\right),$$

wobei zur Abkürzung

$$S = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}$$

gesetzt ist. Aus (44) und (45) folgt:

$$(46)\quad \begin{cases} M = 4\pi\left(-\frac{\partial k}{\partial x} + 2\alpha\frac{\partial k}{\partial N} + \alpha kS + k\frac{\partial \alpha}{\partial N}\right), \\ N = 4\pi\left(-\frac{\partial k}{\partial y} + 2\beta\frac{\partial k}{\partial N} + \beta kS + k\frac{\partial \beta}{\partial N}\right), \\ P = 4\pi\left(-\frac{\partial k}{\partial z} + 2\gamma\frac{\partial k}{\partial N} + \gamma kS + k\frac{\partial \gamma}{\partial N}\right). \end{cases}$$

Benutzen wir die Gleichungen (46), so gehen die Ausdrücke (43) über in:

[1]) Bd. I, 43.

$$
(47)\quad
\begin{cases}
\lim\left(\dfrac{\partial^2 V_a}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 V_i}{\partial x^2}\right)=4\pi\left(-\alpha\dfrac{\partial k}{\partial x}+2\alpha^2\dfrac{\partial k}{\partial N}+\alpha^2 kS+k\alpha\dfrac{\partial \alpha}{\partial N}-\dfrac{\partial(k\alpha)}{\partial x}\right)\\
\lim\left(\dfrac{\partial^2 V_a}{\partial y^2}-\dfrac{\partial^2 V_i}{\partial y^2}\right)=4\pi\left(-\beta\dfrac{\partial k}{\partial y}+2\beta^2\dfrac{\partial k}{\partial N}+\beta^2 kS+k\beta\dfrac{\partial \beta}{\partial N}-\dfrac{\partial(k\beta)}{\partial y}\right)\\
\lim\left(\dfrac{\partial^2 V_a}{\partial z^2}-\dfrac{\partial^2 V_i}{\partial z^2}\right)=4\pi\left(-\gamma\dfrac{\partial k}{\partial z}+2\gamma^2\dfrac{\partial k}{\partial N}+\gamma^2 kS+k\gamma\dfrac{\partial \gamma}{\partial N}-\dfrac{\partial(k\gamma)}{\partial z}\right)\\
\lim\left(\dfrac{\partial^2 V_a}{\partial x\,\partial y}-\dfrac{\partial^2 V_i}{\partial x\,\partial y}\right)=4\pi\left(-\beta\dfrac{\partial k}{\partial x}+2\alpha\beta\dfrac{\partial k}{\partial N}+\alpha\beta kS+k\beta\dfrac{\partial \alpha}{\partial N}-\dfrac{\partial(k\alpha)}{\partial y}\right)\\
\lim\left(\dfrac{\partial^2 V_a}{\partial x\,\partial y}-\dfrac{\partial^2 V_i}{\partial x\,\partial y}\right)=4\pi\left(-\alpha\dfrac{\partial k}{\partial y}+2\alpha\beta\dfrac{\partial k}{\partial N}+\alpha\beta kS+k\alpha\dfrac{\partial \beta}{\partial N}-\dfrac{\partial(k\beta)}{\partial x}\right)\\
\lim\left(\dfrac{\partial^2 V_a}{\partial y\,\partial z}-\dfrac{\partial^2 V_i}{\partial y\,\partial z}\right)=4\pi\left(-\gamma\dfrac{\partial k}{\partial y}+2\beta\gamma\dfrac{\partial k}{\partial N}+\beta\gamma kS+k\gamma\dfrac{\partial \beta}{\partial N}-\dfrac{\partial(k\beta)}{\partial z}\right)\\
\lim\left(\dfrac{\partial^2 V_a}{\partial y\,\partial z}-\dfrac{\partial^2 V_i}{\partial y\,\partial z}\right)=4\pi\left(-\beta\dfrac{\partial k}{\partial z}+2\beta\gamma\dfrac{\partial k}{\partial N}+\beta\gamma kS+k\beta\dfrac{\partial \gamma}{\partial N}-\dfrac{\partial(k\gamma)}{\partial y}\right)\\
\lim\left(\dfrac{\partial^2 V_a}{\partial x\,\partial z}-\dfrac{\partial^2 V_i}{\partial x\,\partial z}\right)=4\pi\left(-\alpha\dfrac{\partial k}{\partial z}+2\alpha\gamma\dfrac{\partial k}{\partial N}+\alpha\gamma kS+k\alpha\dfrac{\partial \gamma}{\partial N}-\dfrac{\partial(k\gamma)}{\partial x}\right)\\
\lim\left(\dfrac{\partial^2 V_a}{\partial x\,\partial z}-\dfrac{\partial^2 V_i}{\partial x\,\partial z}\right)=4\pi\left(-\gamma\dfrac{\partial k}{\partial x}+2\alpha\gamma\dfrac{\partial k}{\partial N}+\alpha\gamma kS+k\gamma\dfrac{\partial \alpha}{\partial N}-\dfrac{\partial(k\alpha)}{\partial z}\right)
\end{cases}
$$

Zufolge der Gleichungen (47) wird:

$$
(48)\quad
\begin{cases}
\lim\left(\dfrac{\partial W_a}{\partial N}-\dfrac{\partial W_i}{\partial N}\right)=-4\pi\Big\{-\alpha^2\dfrac{\partial k_1}{\partial x}+2\alpha^3\dfrac{\partial k_1}{\partial N}+\alpha^3 k_1 S+k_1\alpha^2\dfrac{\partial \alpha}{\partial N}-\alpha\dfrac{\partial(k_1}{\partial x}\\
\qquad -\beta^2\dfrac{\partial k_2}{\partial y}+2\beta^3\dfrac{\partial k_2}{\partial N}+\beta^3 k_2 S+k_2\beta^2\dfrac{\partial \beta}{\partial N}-\beta\dfrac{\partial(k_2}{\partial y}\\
\qquad -\gamma^2\dfrac{\partial k_3}{\partial z}+2\gamma^3\dfrac{\partial k_3}{\partial N}+\gamma^3 k_3 S+k_3\gamma^2\dfrac{\partial \gamma}{\partial N}-\gamma\dfrac{\partial(k_3}{\partial z}\\
\qquad -\alpha\beta\dfrac{\partial k_2}{\partial x}+2\alpha^3\beta\dfrac{\partial k_2}{\partial N}+\alpha^2\beta k_2 S+k_2\alpha\beta\dfrac{\partial \alpha}{\partial N}-\alpha\dfrac{\partial(k_2}{\partial y}\\
\qquad -\alpha^2\dfrac{\partial k_3}{\partial z}+2\alpha^2\gamma\dfrac{\partial k_3}{\partial N}+\alpha^2\gamma k_3 S+\alpha^2 k_3\dfrac{\partial \gamma}{\partial N}-\alpha\dfrac{\partial(k_3}{\partial x}\\
\qquad -\beta^2\dfrac{\partial k_1}{\partial x}+2\alpha\beta^2\dfrac{\partial k_1}{\partial N}+\alpha\beta^2 k_1 S+\beta^2 k_1\dfrac{\partial \alpha}{\partial N}-\beta\dfrac{\partial(k_1}{\partial y}\\
\qquad -\beta\gamma\dfrac{\partial k_3}{\partial y}+2\beta^2\gamma\dfrac{\partial k_3}{\partial N}+\beta^2\gamma k_3 S+\beta\gamma\dfrac{\partial \beta}{\partial N}-\beta\dfrac{\partial(k_3}{\partial z}\\
\qquad -\alpha\gamma\dfrac{\partial k_1}{\partial z}+2\alpha\gamma^2\dfrac{\partial k_1}{\partial N}+\alpha\gamma^2 k_1 S+\alpha\gamma k_1\dfrac{\partial \gamma}{\partial N}-\gamma\dfrac{\partial(k_1}{\partial x}\\
\qquad -\gamma^2\dfrac{\partial k_2}{\partial y}+2\beta\gamma^2\dfrac{\partial k_2}{\partial N}+\beta\gamma^2 k_2 S+\gamma^2 k_2\dfrac{\partial \beta}{\partial N}-\gamma\dfrac{\partial(k_2}{\partial z}
\end{cases}
$$

Mit Hilfe der Beziehungen

$$\left(\beta\frac{\partial k}{\partial x}-\alpha\frac{\partial k}{\partial y}\right)+k\left(\beta\frac{\partial\alpha}{\partial N}-\alpha\frac{\partial\beta}{\partial N}\right)+\left(\frac{\partial(k\alpha)}{\partial y}-\frac{\partial(k\beta)}{\partial x}\right)=0,$$

$$\left(\gamma\frac{\partial k}{\partial y}-\beta\frac{\partial k}{\partial z}\right)+k\left(\gamma\frac{\partial\beta}{\partial N}-\beta\frac{\partial\gamma}{\partial N}\right)+\left(\frac{\partial(k\beta)}{\partial z}-\frac{\partial(k\gamma)}{\partial y}\right)=0,$$

$$\left(\alpha\frac{\partial k}{\partial z}-\gamma\frac{\partial k}{\partial x}\right)+k\left(\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial N}-\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial N}\right)+\left(\frac{\partial(k\gamma)}{\partial x}-\frac{\partial(k\alpha)}{\partial z}\right)=0,$$

die sich aus (47) ableiten lassen, ergibt sich:

$$\lim\left(\frac{\partial\overline{W}_a}{\partial N}-\frac{\partial\overline{W}_i}{\partial N}\right)=-4\pi\left\{-\Sigma\frac{\partial k_1}{\partial x}+2\Sigma\alpha\frac{\partial k_1}{\partial N}+S\Sigma\alpha k_1-\Sigma\alpha\frac{\partial k_1}{\partial N}+\Sigma k_1\frac{\partial\alpha}{\partial N}\right\},$$

$$\lim\left(\frac{\partial\overline{W}_a}{\partial N}-\frac{\partial\overline{W}_i}{\partial N}\right)=-4\pi\left\{\frac{\partial(k_1\alpha)}{\partial N}+S\Sigma\alpha k_1-\Sigma\frac{\partial k_1}{\partial x}\right\},$$

oder wegen $\Sigma k_1=\Sigma m\frac{\partial\alpha}{\partial N}$ [1])

$$\lim\left(\frac{\partial\overline{W}_a}{\partial N}-\frac{\partial\overline{W}_i}{\partial N}\right)=-4\pi\left\{\Sigma\frac{\partial\left(m\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial N}\right)}{\partial N}+Sm\Sigma\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial N}-\Sigma\frac{\partial\left(m\frac{\partial\alpha}{\partial N}\right)}{\partial x}\right\}.$$

In den Summen Σ entstehen die Summanden aus dem ersten durch Vertauschung von k_1 mit k_2 und k_3, von x mit y und z, von α mit β und γ. Da $\Sigma\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial N}=0$ [2]) ist, so wird

$$\lim\left(\frac{\partial\overline{W}_a}{\partial N}-\frac{\partial\overline{W}_i}{\partial N}\right)=4\pi\Sigma\frac{\partial\left(m\frac{\partial\alpha}{\partial N}\right)}{\partial x}$$

$$=4\pi\left\{\frac{\partial\left(m\frac{\partial\alpha}{\partial N}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(m\frac{\partial\beta}{\partial N}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(m\frac{\partial\gamma}{\partial N}\right)}{\partial z}\right\},$$

$$(49)\quad\left\{\lim\left(\frac{\partial\overline{W}_a}{\partial N}-\frac{\partial\overline{W}_i}{\partial N}\right)=4\pi\left\{\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}\right\},\right.$$

wenn wir definieren:

$$(50)\quad\left\{\qquad f_1=m\frac{\partial\alpha}{\partial N},\quad f_2=m\frac{\partial\beta}{\partial N},\quad f_3=m\frac{\partial\gamma}{\partial N}.\right.$$

Drücken wir die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z durch die orthogonalen Variabeln t, u, v aus:

$$x=x(t,u,v),\quad y=y(t,u,v),\quad z=z(t,u,v),$$

[1]) Vgl. oben S. 9. [2]) A. 177.

so ist:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}=\Sigma\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\alpha}{l}+\Sigma\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\alpha_1}{l_1}+\Sigma\frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\alpha_2}{l_2}.$$

In den Summen Σ entstehen die Summanden aus dem ersten durch Vertauschung von α mit β und γ, von α_1 mit β_1 und γ_1, von α_2 mit β_2 und γ_2, während zugleich der Index 1 von f mit den Indices 2 und 3 zu vertauschen ist. Wir setzen für f_1, f_2, f_3 die Werte unter (50) ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}&=\Sigma\frac{\partial\left(m\frac{\partial\alpha}{\partial N}\right)}{\partial t}\frac{\alpha}{l}+\Sigma\frac{\partial\left(m\frac{\partial\alpha}{\partial N}\right)}{\partial u}\frac{\alpha_1}{l_1}+\Sigma\frac{\partial\left(m\frac{\partial\alpha}{\partial N}\right)}{\partial v}\frac{\alpha_2}{l_2},\\
&=m\left\{\Sigma\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{l}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)\frac{\alpha}{l}+\Sigma\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{l}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)\frac{\alpha_1}{l_1}+\Sigma\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{l}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)\frac{\alpha_2}{l_2}\right\}\\
&+\frac{\partial m}{\partial t}\Sigma\frac{1}{l}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\frac{\alpha}{l}+\frac{\partial m}{\partial u}\Sigma\frac{1}{l}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\frac{\alpha_1}{l_1}+\frac{\partial m}{\partial v}\Sigma\frac{1}{l}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\frac{\alpha_2}{l_2},\\
&=m\left\{\frac{1}{l}\frac{\partial}{\partial t}\left(\Sigma\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial N}\right)-\frac{1}{l^2}\Sigma\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{ll_1}\frac{\partial}{\partial u}\left(\Sigma\alpha_1\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)\right.\\
&-\frac{1}{ll_1}\Sigma\frac{\partial\alpha_1}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial t}-\frac{1}{l_1l^2}\frac{\partial l}{\partial u}\Sigma\alpha_1\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\frac{1}{ll_2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\Sigma\alpha_2\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)\\
&\left.-\frac{1}{ll_2}\Sigma\frac{\partial\alpha_2}{\partial v}\frac{\partial\alpha}{\partial t}-\frac{1}{l_2l^2}\frac{\partial}{\partial v}\Sigma\alpha_2\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\}+\frac{1}{l}\frac{\partial m}{\partial t}\Sigma\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial N}\\
&+\frac{1}{ll_1}\frac{\partial m}{\partial u}\Sigma\alpha_1\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\frac{1}{ll_2}\frac{\partial m}{\partial v}\Sigma\alpha_2\frac{\partial\alpha}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Beachten wir, daß

$$\Sigma\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial N}=0,\quad\Sigma\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2=\frac{\alpha_2^2}{l_2^2}\left(\frac{\partial l}{\partial v}\right)^2,$$

$$\Sigma\frac{\partial\alpha_1}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial t}=\frac{1}{l_1l_2}\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial l_1}{\partial v}\Sigma\alpha_1\alpha_2=0,$$

oder

$$\Sigma\frac{\partial\alpha_1}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial t}=\frac{1}{l_2^2}\frac{\partial l}{\partial v}\frac{\partial l_1}{\partial v}\Sigma\alpha_2\alpha_2=\frac{1}{l_2^2}\frac{\partial l}{\partial v}\frac{\partial l_1}{\partial v},$$

$$\Sigma\alpha_1\frac{\partial\alpha}{\partial t}=-\frac{1}{l_1}\frac{\partial l}{\partial u},\quad\Sigma\alpha_2\frac{\partial\alpha}{\partial t}=-\frac{1}{l_2}\frac{\partial l}{\partial v},$$

$$\Sigma\frac{\partial\alpha_2}{\partial v}\frac{\partial\alpha}{\partial t}=\frac{1}{ll_1}\frac{\partial l_2}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial u}\Sigma\alpha_1\alpha_1=\frac{1}{l_1^2}\frac{\partial l_2}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial u}\ ^{1})$$

ist und l, l_1, l_2 in unserem Falle von v unabhängig sind, so erhält man:

[1]) A. 181.

$$\lim\left(\frac{\partial \overline{W}_a}{\partial N} - \frac{\partial \overline{W}_i}{\partial N}\right) = 4\pi\left\{m\left[-\frac{1}{l l_1}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{l_1}\frac{\partial l}{\partial u}\right) + \frac{1}{l_1^2 l^2}\left(\frac{\partial l}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{l l_1^2 l_2}\frac{\partial l_2}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial u}\right] - \frac{1}{l l_1^2}\frac{\partial m}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial u}\right\},$$

$$= -4\pi\frac{1}{l_1 l_2}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(m\frac{l_2}{l_1}\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial \vartheta}\right),$$

$$(51)\quad \left\{\lim\left(\frac{\partial \overline{W}_a}{\partial N} - \frac{\partial \overline{W}_i}{\partial N}\right) = -\frac{4\pi}{\sqrt{a^2 - e^2\cos^2\vartheta}\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left\{\frac{m e^2 \sin^2\vartheta\cos\vartheta}{\sqrt{a^2 - e^2\cos^2\vartheta}^3}\right\},\right.$$

wobei u durch ϑ ersetzt ist.

Subtrahiert man die Gleichung (51) von (41), so wird:

$$\frac{1}{4\pi}\lim\left(\frac{\partial W_a}{\partial N} - \frac{\partial W_i}{\partial N}\right) = \left[\frac{\partial W}{\partial N}\right] = \frac{1}{l_1 l_2}\left\{\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{l_2}{l_1}\frac{\partial m}{\partial \vartheta}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{l_1}{l_2}\frac{\partial m}{\partial \varphi}\right)\right\}.$$ [1])

Diese Gleichung zeigt, wie sich die normale Ableitung von W beim Durchgang des Aufpunktes durch die belegte Fläche ändert und bestätigt wiederum die von Wangerin allgemein aufgestellte Formel.

[1]) A. 184, wenn in obiger Formel ϑ durch u, φ durch v ersetzt werden.

II. Das Potential einer n-fach belegten Kugelfläche.

Bevor das Potential für die n-fache Belegung der Kugel definiert wird, möge zunächst die Potentialformel der vier- und fünffachen Belegung ermittelt werden.

Definition des Potentials einer vierfach belegten Kugelfläche.

Zu der gegebenen Kugel F denke man sich drei konzentrische Kugeln F_1, F_2, F_3. Die Kugel F habe den Radius R, F_1 den Radius $R+\delta$, F_2 den Radius $R+2\delta$, F_3 den Radius $R+3\delta$. Die Flächenelemente von F, F_1, F_2, F_3 seien do, do_1, do_2, do_3. Man belege:

F mit Masse von der Dichtigkeit $k = q p_4$,
F_1 „ „ „ „ „ „ $k = -3 q p_{41}$,
F_2 „ „ „ „ „ „ $k = 3 q p_{42}$,
F_3 „ „ „ „ „ „ $k = -q p_{43}$.

Dabei sind p_4, p_{41}, p_{42}, p_{43} Funktionen des Ortes auf den Flächen, während q für alle Flächenpunkte denselben Wert hat. Wählt man p_{41}, p_{42}, p_{43} so, daß

$$p_4\, do = p_{41}\, do_1 = p_{42}\, do_2 = p_{43}\, do_3$$

ist und bildet analog wie beim Potential der dreifach belegten Kugelfläche [1]) die Summe der Potentiale für die vier belegten Kugelflächen, läßt δ beliebig abnehmen und zugleich den Faktor q derart wachsen, daß

$$\lim_{\delta \to 0} (q\, \delta^3) = 1$$

wird, so erhält man, wenn $\frac{1}{\varrho} = \varphi(R)$ wie S. 2 gesetzt wird,

$$\lim_{\delta \to 0} (V + V_1 + V_2 + V_3) = P_4 = -\int\int p_4\, do\, \varphi'''(R),$$

$$P_4 = -\int\int p_4\, do \frac{\partial^3 \frac{1}{\varrho}}{\partial R^3}.$$

[1]) Vgl. oben S. 2.

Dieser Grenzwert P_1 stellt das Potential der vierfach mit Masse belegten Kugel dar, p_4 soll das Moment dieser Belegung genannt werden.

Definition des Potentials einer fünffach belegten Kugelfläche.

Zu der gegebenen Kugel F denke man sich vier konzentrische Kugeln F_1, F_2, F_3, F_4. Die Kugel F habe den Radius R, F_1 den Radius $R+\delta$, F_2 den Radius $R+2\delta$, F_3 den Radius $R+3\delta$, F_4 den Radius $R+4\delta$. Die Flächenelemente von F, F_1, F_2, F_3, F_4 seien do, do_1, do_2, do_3, do_4. Man belege:

F mit Masse von der Dichtigkeit $k = q\,p_5$,
F_1 „ „ „ „ „ $k = -4\,q\,p_{51}$,
F_2 „ „ „ „ „ $k = 6\,q\,p_{52}$,
F_3 „ „ „ „ „ $k = -4\,q\,p_{53}$,
F_4 „ „ „ „ „ $k = q\,p_{54}$.

Dabei sind p_5, p_{51}, p_{52}, p_{53}, p_{54} Funktionen des Ortes auf den Flächen, während q für alle Flächenpunkte denselben Wert hat. Wählt man p_{51}, p_{52}, p_{53}, p_{54} so, daß

$$p_5\,do = p_{51}\,do_1 = p_{52}\,do_2 = p_{53}\,do_3 = p_{54}\,do_4$$

ist und bildet nun wieder die Summe der Potentiale für die fünf belegten Kugelflächen, läßt δ beliebig abnehmen und q derart wachsen, daß

$$\lim_{\delta \to 0} (q\,\delta^4) = 1$$

wird, so ergibt sich, wenn $\frac{1}{\varrho} = \varphi(R)$ wie S. 2 gesetzt wird,

$$\lim_{\delta \to 0} (V + V_1 + V_2 + V_3 + V_4) = P_5 = \int\int p_5\,do\,\varphi''''(R),$$

$$P_5 = \int\int p_5\,do\,\frac{\partial^4 \frac{1}{\varrho}}{\partial R^4}.$$

Dieser Grenzwert P_5 stellt das Potential der fünffach mit Masse belegten Kugel F dar, p_5 soll das Moment dieser Belegung genannt werden.

In ganz analoger Weise gewinnt man die

Definition des Potentials einer n-fach belegten Kugelfläche.

Zu der gegebenen Kugel F denke man sich $(n-1)$ konzentrische Kugeln F_1, F_2, ... F_{n-1}. Die Kugel

F habe den Radius R, F_1 den Radius $R+\delta$,
F_2 „ „ „ $R+2\delta$, F_3 „ „ $R+3\delta$, ...
F_{n-2} „ „ „ $R+(n-2)\delta$, F_{n-1} „ „ $R+(n-1)\delta$.

Die Flächenelemente von F, F_1, F_2, ... F_{n-2}, F_{n-1} seien do, do_1, do_2, ... do_{n-2}, do_{n-1}. Man belege

F mit Masse von der Dichtigkeit $k = q\,p_n$,

F_1 „ „ „ „ „ $k = -\binom{n-1}{1} q\,p_{n_1}$,

F_2 „ „ „ „ „ $k = \binom{n-1}{2} q\,n_2$,

— — — — — — — — — — — —

F_{n-2} mit Masse von der Dichtigkeit $k = (-1)^n \binom{n-1}{1} q\,p\,n_{(n-2)}$,

F_{n-1} „ „ „ „ „ $k = (-1)^{n-1} q\,p\,n_{(n-1)}$,

wobei p_n, p_{n_1}, p_{n_2}, ... $p_{n(n-2)}$, $p_{n(n-1)}$ Funktionen des Ortes auf den Flächen sind, während q für alle Flächenpunkte denselben Wert hat. Ist nun ϱ der Abstand des Aufpunktes $A\,(x, y, z)$ von einem Punkte $P\,(\xi, \eta, \zeta)$ der Fläche F, sind ϱ_1, ϱ_2, ... ϱ_{n-2}, ϱ_{n-1} die Abstände zwischen A und den Punkten P_1, P_2, ... P_{n-2}, P_{n-1}, die auf den entsprechenden Flächen F_1, F_2, ... F_{n-2}, F_{n-1} und zugleich auf der Normale von F im Punkte P liegen, so sind die Potentiale der n Flächen:

$$(1)\quad \begin{cases} V = q\int\int \dfrac{p_n\,do}{\varrho}, & V_1 = -\binom{n-1}{1} q\int\int \dfrac{p_{n_1}\,do_1}{\varrho_1}, \\ V_2 = \binom{n-1}{2} q\int\int \dfrac{p_{n_2}\,do_2}{\varrho_n}, & \text{— — — — — — — — —} \\ V_{n-2} = (-1)^n \binom{n-1}{1} q\int\int \dfrac{p_{n-2}\,do_{n-2}}{\varrho_{n-2}}, & V_{n-1} = (-1)^{n-1} q\int\int \dfrac{p_{n-1}\,do_{n-1}}{\varrho_{n-1}} \end{cases}$$

Weiter wähle man p_{n_1}, p_{n_2}, p_{n_3}, ... $p_{n(n-2)}$, $p_{n(n-1)}$ derart, daß

$$(2)\quad p_n\,do = p_{n_1}\,do_1 = p_{n_2}\,do_2 = \ldots = p_{n(n-2)}\,do_{n-2} = p_{n(n-1)}\,do_{n-1}$$

ist, so ist die Summe der n Potentiale:

$$(3)\quad \begin{cases} V + V_1 + V_2 + \ldots + V_{n-2} + V_{n-1} = q\int\int p_n\,do \\ \left\{\dfrac{1}{\varrho} - \dfrac{\binom{n-1}{1}}{\varrho_1} + \dfrac{\binom{n-1}{2}}{\varrho_2} - \ldots + \dfrac{(-1)^n\binom{n-1}{1}}{\varrho_{n-2}} + \dfrac{(-1)^{n-1}}{\varrho_{n-1}}\right\}, \end{cases}$$

wo nunmehr die Integration nur über die Fläche F zu erstrecken ist. Setzt man wieder

$$\frac{1}{\varrho} = \varphi(R), \quad \frac{1}{\varrho_1} = \varphi(R+\delta), \quad \frac{1}{\varrho_2} = \varphi(R+2\delta), \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \quad \frac{1}{\varrho_{n-2}} = \varphi(R+(n-2)\delta), \quad \frac{1}{\varrho_{n-1}} = \varphi(R+(n-1)\delta)$$

und entwickelt diese Ausdrücke nach dem Taylorschen Satze, so erhält man für den Klammerausdruck

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\varrho} - \frac{\binom{n-1}{1}}{\varrho_1} + \frac{\binom{n-1}{2}}{\varrho_2} \ldots + (-1)^n \frac{\binom{n-1}{1}}{\varrho_{n-2}} + \frac{(-1)^{n-1}}{\varrho_{n-1}} = \varphi(R) \\
&-\binom{n-1}{1}\varphi(R) - \binom{n-1}{1}\frac{\varphi'(R)}{1!}\delta - \binom{n-1}{1}\frac{\varphi''(R)}{2!}\delta^2 - \binom{n-1}{1}\frac{\varphi'''(R)}{3!}\delta^3 - \ldots \\
&+\binom{n-1}{2}\varphi(R) + \binom{n-1}{2}\frac{\varphi'(R)}{1!}2\delta + \binom{n-1}{2}\frac{\varphi''(R)}{2!}2^2\delta^2 + \binom{n-1}{2}\frac{\varphi'''(R)}{3!}2^3\delta^3 + \ldots \\
&-\binom{n-1}{3}\varphi(R) - \binom{n-1}{3}\frac{\varphi'(R)}{1!}3\delta - \binom{n-1}{3}\frac{\varphi''(R)}{2!}3^2\delta^2 - \binom{n-1}{3}\frac{\varphi'''(R)}{3!}3^3\delta^3 - \ldots \\
&\qquad\qquad \text{— — — — — — — — — — — — — — — —} \\
&+(-1)^n\binom{n-1}{1}\varphi(R) + (-1)^n\binom{n-1}{1}\frac{\varphi'(R)}{1!}(n-2)\delta + (-1)^n\binom{n-1}{1}\frac{\varphi''(R)}{2!} \\
&\qquad\qquad \cdot(n-2)^2\delta^2 + (-1)^n\binom{n-1}{1}\frac{\varphi'''(R)}{3!}(n-2)^3\delta^3 + \ldots \\
&+(-1)^{n-1}\varphi(R) + (-1)^{n-1}\frac{\varphi'(R)}{1!}(n-1)\delta + (-1)^{n-1}\frac{\varphi''(R)}{2!}(n-1)^2\delta^2 \\
&\qquad\qquad + (-1)^{n-1}\frac{\varphi'''(R)}{3!}(n-1)^3\delta^3 + \ldots
\end{aligned}$$

Es läßt sich zeigen, daß bis zur $(n-1)$ten Potenz die Summen der Faktoren der entsprechenden Ableitungen Null werden. Fassen wir zunächst die Glieder mit $\varphi(R)$ zusammen, so erhalten wir:

$$\varphi(R)\left[1 - \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} - \binom{n-1}{3} + \ldots + (-1)^n\binom{n-1}{1} + (-1)^{n-1}\right].$$

Der Klammerausdruck ist die Entwicklung des Binoms $\{(1-x)^{n-1}\}_{x=1}$, also gleich Null. Es fallen also alle Glieder mit $\varphi(R)$ fort.

Wir betrachten nun die Glieder mit $\varphi'(R)$:

$$\frac{\varphi'(R)}{1!}\,\delta\left[-\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}\cdot 2-\binom{n-1}{3}\cdot 3+\ldots\ldots\right.$$
$$\left.+(-1)^n\binom{n-1}{1}\cdot(n-2)+(-1)^{n-1}(n-1)\right].$$

Dafür können wir setzen $\dfrac{\varphi'(R)}{1!}\,\delta\left[\left\{\dfrac{d\,(1-x)^{n-1}}{dx}\right\}_{x=1}\right]=0$

und somit verschwinden auch alle Glieder mit $\varphi'(R)$. In gleicher Weise folgt wegen

$$\left\{\frac{d^k\,(1-x)^{n-1}}{dx^k}\right\}_{x=1}=0,\quad (k<n-1) \tag{6}$$

daß für alle $k<n-1$ sich sämtliche Glieder mit $\varphi^{(k)}(R)$ fortheben. Der Ausdruck (6) ist aber für $k=n-1$ gleich $(n-1)!$, also von Null verschieden. Die Summe der Glieder mit $\varphi^{(n-1)}(R)$ lautet somit:

$$(-1)^{n-1}\frac{\varphi^{(n-1)}(R)}{(n-1)!}\,\delta^{n-1}\left[\left\{\frac{d^{n-1}\,(1-x)^{n-1}}{dx^{n-1}}\right\}_{x=1}\right]$$
$$=(-1)^{n-1}\frac{\varphi^{(n-1)}(R)}{(n-1)!}\,\delta^{n-1}(n-1)!\,.$$

Wir erhalten demnach für die Gleichung (4):

$$\left\{\frac{1}{\varrho}-\frac{\binom{n-1}{1}}{\varrho_1}+\frac{\binom{n-1}{2}}{\varrho_2}-\ldots+(-1)^n\frac{\binom{n-1}{1}}{\varrho_{n-2}}+\frac{(-1)^{n-1}}{\varrho_{n-1}}\right.$$
$$\left.=(-1)^{n-1}\varphi^{(n-1)}(R)\,\delta^{n-1}+A\,\varphi^{(n)}(R)\,\delta^n+\ldots,\right. \tag{7}$$

wobei A der Faktor von $\varphi^{(n)}(R)$ ist.

Unter Benutzung der Gleichung (7) geht (3) über in:

$$V+V_1+V_2+\ldots+V_{n-2}+V_{n-1}$$
$$=q\int\!\!\int p_n\,do\,\{(-1)^{n-1}\varphi^{(n-1)}(R)\,\delta^{n-1}+A\,\varphi^{(n)}(R)\,\delta^n+\ldots\}.$$

Läßt man nun δ beliebig abnehmen und zugleich den Faktor q derart wachsen, daß

$$\lim_{\delta\to 0}(q\,\delta^{n-1})=1$$

wird, so erhält man:

$$\lim_{\delta\to 0}(V+V_1+V_2+\ldots+V_{n-2}+V_{n-1})=P_n$$
$$=(-1)^{n-1}\int\!\!\int p_n\,do\,\varphi^{(n-1)}(R),$$

$$(8) \qquad P_n = (-1)^{n-1} \int\int p_n \, do \, \frac{\partial^{n-1} \frac{1}{\varrho}}{\partial R^{n-1}}.$$

Dieser Grenzwert P_n stellt das Potential der n-fach mit Masse belegten Fläche F dar, p_n soll das Moment dieser Belegung genannt werden.

Wir schreiten nun zur Berechnung des Potentials einer m-fach belegten Kugelfläche.[1]) Nach obigen Ausführungen hat das Potential einer m-fach belegten Kugelfläche die Form:

$$(9) \qquad P_m = (-1)^{m-1} \int\int p_m \, do \, \frac{\partial^{m-1} \frac{1}{\varrho}}{\partial R^{m-1}},$$

oder wegen $\qquad do = R^2 \sin \vartheta_1 \, d\vartheta_1 \, d\varphi_1$

$$(10) \qquad P_m = (-1)^{m-1} R^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} p_m \, \frac{\partial^{m-1} \frac{1}{\varrho}}{\partial R^{m-1}} \sin \vartheta_1 \, d\vartheta_1 \, d\varphi_1.$$

R, ϑ, φ, r_1, ϑ_1, φ_1, ϱ haben dieselbe Bedeutung wie beim Potential der dreifach belegten Kugelfläche. Das Moment p_m der m-fachen Belegung ist irgendeine gegebene Funktion von ϑ_1, φ_1, die von R unabhängig ist, somit hat man, da auch die Integrationsgrenzen von R unabhängig sind, für die Kugel:

$$(11) \qquad P_m = (-1)^{m-1} R^2 \frac{\partial^{m-1}}{\partial R^{m-1}} \left\{ \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{p_m \sin \vartheta_1 \, d\vartheta_1 \, d\varphi_1}{\varrho} \right\}.$$

Das nach R zu differentiierende Integral hat genau die Form wie $\frac{V}{R^2}$.[2]) Man kann darauf wieder das für $V : R^2$ abgeleitete Resultat anwenden. Entwickelt man noch p_m nach Kugelfunktionen:

$$(12) \qquad p_m = \sum_{n=0}^{\infty} X_n (\vartheta, \varphi),$$

so erhält man für äußere Punkte

$$P_{m_a} = (-1)^{m-1} R^2 \frac{\partial^{m-1}}{\partial R^{m-1}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{R^n}{r^{n+1}} X_n (\vartheta, \varphi) \right\},$$

[1]) Es ist hier m statt n gewählt, da in den Formeln für P_{m_a} und P_{m_i} die Kugelfunktion, die reziproke Entfernung und die Ableitung schon n enthalten.

[2]) Bd. II, 97.

für innere

$$P_{m_i} = R^2 \frac{\partial^{m-1}}{\partial R^{m-1}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{r^n}{R^{n+1}} X_n(\vartheta, \varphi) \right\},$$

d. h.

$$(13\,a)\quad P_{m_a} = (-1)^{m-1} 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-2))}{2n+1} \cdot \frac{R^{n-(m-3)}}{r^{n+1}} X_n(\vartheta, \varphi),$$

$$(13\,b)\quad P_{m_i} = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{2n+1} \frac{r^n}{R^{n+m-2}} X_n(\vartheta, \varphi).$$

Aus den Ausdrücken (13 a) und (13 b) folgt

für grades $m = 2\lambda$:

$$(14\,a)\quad \begin{cases} \lim\limits_{r=R} (P_{2\lambda a} - P_{2\lambda i}) = -\dfrac{4\pi}{R^{2\lambda-2}} \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n(\vartheta, \varphi) \\ \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(2\lambda-2)) + (n+1)(n+2)\ldots(n+2\lambda-1)}{2n+1}, \end{cases}$$

für ungrades $m = 2\lambda+1$:

$$(14\,b)\quad \begin{cases} \lim\limits_{r=R} (P_{(2\lambda+1)a} - P_{(2\lambda+1)i}) = -\dfrac{4\pi}{R^{2\lambda-1}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(\vartheta, \varphi) \\ \dfrac{(n+1)(n+2)\ldots(n+2\lambda) - n(n-1)(n-2)\ldots(n-(2\lambda-1))}{2n+1}. \end{cases}$$

Setzt man

$$(15)\qquad 2n+1 = z, \qquad n = \frac{z-1}{2},$$

so nimmt unter Benutzung der Gleichung (15) der Quotient Q unter dem Summenzeichen (14 a) folgende Form an:

$$Q = \frac{\frac{z-1}{2}\frac{z-3}{2}\frac{z-5}{2}\ldots\frac{z-(4\lambda-3)}{2} + \frac{z+1}{2}\frac{z+3}{2}\frac{z+5}{2}\ldots\frac{z+4\lambda-3}{2}}{z},$$

$$= \frac{1}{2^{2\lambda-1}} \left\{ \frac{z^{2\lambda-1} - a_1 z^{2\lambda-2} + a_2 z^{2\lambda-3} \ldots + a_{2\lambda-2} z - a_{2\lambda-1}}{z} + \frac{z^{2\lambda-1} + a_1 z^{2\lambda-2} \ldots + a_{2\lambda-2} z + a_{2\lambda-1}}{z} \right\},$$

$$Q = \frac{1}{2^{2\lambda-2}} (z^{2\lambda-2} + a_2 z^{2\lambda-4} + a_4 z^{2\lambda-6} + \ldots + a_{2\lambda-6} z^4 + a_{2\lambda-4} z^2 + a_{2\lambda-2}).$$

Setzt man für z den Wert unter (15) ein, also

$$(16)\quad \begin{cases} z^2 = 4n(n+1)+1, \\ z^4 = 16n^2(n+1)^2 + 8n(n+1)+1, \\ z^6 = 64n^3(n+1)^3 + 48n^2(n+1)^2 + 12n(n+1)+1, \\ \text{— — — — — — — — — — — — — — —} \end{cases}$$

so ergibt sich

$$(17)\quad \begin{cases} Q = \dfrac{1}{2^{2\lambda-2}}\,(2^{2\lambda-2}\,n^{\lambda-1}(n+1)^{\lambda-1} + \bar{a}_2\,n^{\lambda-2}(n+1)^{\lambda-2} \\ \qquad + \ldots + \bar{a}_{2\lambda-6}\,n^2(n+1)^2 + \bar{a}_{2\lambda-4}\,n(n+1) + \bar{a}_{2\lambda-2}). \end{cases}$$

Zufolge der Gleichung (17) geht (14 a) über in

$$(18)\quad \begin{cases} \lim\limits_{r=R}(P_{2\lambda a} - P_{2\lambda i}) = -\dfrac{4\pi}{R^{2\lambda-2}} \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n(\vartheta,\varphi)\{n^{\lambda-1}(n+1)^{\lambda-1} \\ \qquad + \bar{a}_2\,n^{\lambda-2}(n+1)^{\lambda-2} + \ldots + \bar{a}_{2\lambda-6}\,n^2(n+1)^2 \\ \qquad + \bar{a}_{2\lambda-4}\,n(n+1) + \bar{\bar{a}}_{2\lambda-2}\}. \end{cases}$$

Setzt man zur Abkürzung, falls F eine beliebige Funktion,

$$\Delta_k F = \frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial \sin\vartheta\,\dfrac{\partial\,\Delta_{k-1}F}{\partial\vartheta}}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\,\frac{\partial^2(\Delta_{k-1}F)}{\partial\varphi^2},$$

wo $k = 1, 2, \ldots$, $\Delta_0 F$ die Funktion F selbst bezeichnet, dann ist nach der Differentialgleichung der Kugelfunktion

$$\Delta_1 X_n = -n(n+1)\,X_n,$$
$$\Delta_2 X_n = -n(n+1)\,\Delta_1 X_n = n^2(n+1)^2\,X_n,$$

und durch den Schluß von k auf $k+1$ ergibt sich

$$\Delta_k X_n = (-1)^k\,n^k(n+1)^k\,X_n.$$

Mittels der Gleichung (18) erhalten wir:

$$(19)\quad \begin{cases} \lim\limits_{r=R}(P_{2\lambda a} - P_{2\lambda i}) = -\dfrac{4\pi}{R^{2\lambda-2}}\{(-1)^{\lambda-1}\,\Delta_{\lambda-1}(\mu) \\ \qquad + (-1)^{\lambda-2}\,a_2\,\Delta_{\lambda-2}(\mu) + (-1)^{\lambda-3}\,a_4\,\Delta_{\lambda-3}(\mu) \\ \qquad + \ldots + \bar{a}_{2\lambda-6}\,\Delta_2(\mu) - a_{2\lambda-4}\,\Delta_1(\mu) + a_{2\lambda-2}(\mu)\}. \end{cases}$$

μ bedeutet das Moment der 2λ-fachen Belegung und zwar bezeichnet (μ) den Wert von μ in demjenigen Punkte, in dem der Aufpunkt durch die belegte Fläche geht.

Die Koeffizienten $a_{2\lambda-2}, a_{2\lambda-4}, \ldots a_2$ lassen sich folgendermaßen bestimmen:

$$\bar{a}_{2\lambda-2} = \frac{1}{2^{2\lambda-2}}\,\bar{a}_{2\lambda-2} = \frac{1}{2^{2\lambda-2}}\{a_{2\lambda-2} + a_{2\lambda-4} + a_{2\lambda-6} + \ldots - a_1 + a_2 + 1\},$$

$$\bar{a}_{2\lambda-2} = \frac{1}{2^{2\lambda-2}}\sum_{0}^{\lambda-1} a_{2\nu}; \qquad (a_0 = 1),$$

oder $\bar{a}_{2\lambda-2} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2\lambda-1)$.

Die $a_{2\nu}$ sind die Koeffizienten der Gleichung $(2\lambda-1)$-ten Grades von z und daher mit Hilfe der symmetrischen Funktionen bestimmbar.

$$\bar{a}_{2\lambda-4} = \frac{1}{2^{2\lambda-2}}\,\bar{a}_{2\lambda-4} = \frac{1}{2^{2\lambda-2}} \cdot 4\{a_{2\lambda-4} + 2a_{2\lambda-6} + 3a_{2\lambda-8} + \ldots + (\lambda-3)a_4 + (\lambda-2)a_2 + (\lambda-1)\},$$

$$a_{2\lambda-4} = \frac{1}{2^{2\lambda-4}}\sum_{\lambda-s}^{1} \mu \sum_{0}^{\lambda-2} a_{2\nu}; \qquad (s = 1, 2, 3 \ldots).$$

$$\bar{a}_{2\lambda-6} = \frac{1}{2^{2\lambda-2}}\,\bar{a}_{2\lambda-6} = \frac{1}{2^{2\lambda-2}} \cdot 16\{a_{2\lambda-6} + (1+2)\,a_{2\lambda-8} + (1+2+3)\,a_{2\lambda-10} + \ldots + (1+2+\ldots+(\lambda-3))\,a_2 + (1+2+\ldots+(\lambda-2))\},$$

$$a_{2\lambda-6} = \frac{1}{2^{2\lambda-5}}\sum_{\lambda-s}^{1} \mu(\mu+1)\sum_{0}^{\lambda-3} a_{2\nu}; \qquad (s = 2, 3, 4 \ldots).$$

Auf analoge Weise werden die übrigen Koeffizienten bestimmt. Mit Hilfe der Gleichungen (15) nimmt der Quotient Q' unter dem Summenzeichen (14 b) folgende Form an:

$$Q' = \frac{z+\frac{1}{2}\,z+\frac{3}{2}\,z-\frac{5}{2}\cdots z+\frac{4\lambda-1}{2} - z-\frac{1}{2}\,z-\frac{3}{2}\,z-\frac{5}{2}\cdots z-\frac{(4\lambda-1)}{2}}{z},$$

$$= \frac{1}{2^{2\lambda}}\,\frac{z^{2\lambda} + a_1 z^{2\lambda-1} + a_2 z^{2\lambda-2} + \ldots + a_{2\lambda-1} z + a_{2\lambda}}{z} - \frac{z^{2\lambda} - a_1 z^{2\lambda-1} + \ldots - a_{2\lambda-1} z + a_{2\lambda}}{z},$$

$$(20)\quad Q' = \frac{1}{2^{2\lambda-1}}(a_1 z^{2\lambda-2} + a_3 z^{2\lambda-4} + \ldots + a_{2\lambda-3} z^2 + a_{2\lambda-1}).$$

Setzt man die Ausdrücke (16) in (20) ein, so ergibt sich:

$$(21)\quad \begin{cases} \varphi' = \dfrac{1}{2^{2\lambda-1}}\,(a_1\,2^{2\lambda-2}\,n^{\lambda-1}\,(n+1)^{\lambda-1} + \bar{a}_3\,n^{\lambda-2}\,(n+1)^{\lambda-2} \\ \qquad + \ldots + \bar{a}_{2\lambda-3}\,n\,(n+1) + \bar{a}_{2\lambda-1}). \end{cases}$$

Mittels der Formeln (21) geht (14 b) über in:

$$(22)\quad \begin{cases} \lim\limits_{r=R}\,(P_{(2\lambda+1)a} - P_{(2\lambda+1)i}) = -\dfrac{4\pi}{R^{2\lambda-1}}\Big\{(-1)^{\lambda-1}\,\dfrac{a_1}{2}\,A_{\lambda-1}(\mu) \\ + (-1)^{\lambda-2}\,a_3\,A_{\lambda-2}(\mu) + \ldots - a_{2\lambda-3}\,A_1(\mu) + a_{2\lambda-1}(\mu)\Big\}. \end{cases}$$

Auch hier lassen sich die Koeffizienten bestimmen, nämlich:

$$a_1 = z_1 + z_2 + \ldots + z_{2\lambda} = 1 + 3 + 5 + \ldots + (4\lambda - 1) = 4\lambda^2.$$

$$a_{2\lambda-1} = \frac{1}{2^{2\lambda-1}}\,(a_{2\lambda-1} + a_{2\lambda-3} + \ldots + a_3 + a_1)$$

$$= \frac{1}{2^{2\lambda-1}}\sum_{0}^{\lambda-1} a_{2\nu+1}, \text{ oder}$$

$$a_{2\lambda-1} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2\lambda.$$

$$a_{2\lambda-3} = \frac{1}{2^{2\lambda-1}}\,\bar{a}_{2\lambda-3} = \frac{1}{2^{2\lambda-1}}\cdot 4\,\{a_{2\lambda-3} + 2\,a_{2\lambda-5} + 3\,a_{2\lambda-7}$$

$$+ \ldots + (\lambda-2)\,a_3 + (\lambda-1)\,a_1\}.$$

$$a_{2\lambda-3} = \frac{1}{2^{2\lambda-3}}\sum_{\lambda-s}^{1}\mu\sum_{0}^{\lambda-2} a_{2\nu+1}; \qquad (s = 1, 2, 3\ldots).$$

$$\bar{a}_{2\lambda-5} = \frac{1}{2^{2\lambda-1}}\,\bar{a}_{2\lambda-5} = \frac{1}{2^{2\lambda-1}}\cdot 16\,\{a_{2\lambda-5} + a_{2\lambda-7}\,(1+2)$$

$$+ a_{2\lambda-9}\,(1+2+3) + \ldots + a_3\,(1+2+\ldots+(\lambda-2))$$

$$+ a_1\,(1+2+\ldots+(\lambda-1))\},$$

$$\bar{a}_{2\lambda-5} = \frac{1}{2^{2\lambda-4}}\sum_{\lambda-s}^{1}\mu\,(\mu+1)\sum_{0}^{\lambda-3} a_{2\nu+1}; \qquad (s = 1, 2, 3\ldots).$$

Analog ergeben sich die übrigen Koeffizienten.

Die Gleichungen (19) und (22) zeigen, wie sich das Potential einer m-fach belegten Kugelfläche beim Durchgang des Aufpunktes durch die belegte Fläche ändert.

Für eine vier- und fünffach belegte Kugelfläche findet man:

$$\lim_{r=R}\,(P_{4a} - P_{4i}) = -\frac{4\pi}{R^2}\,(-A_1(p_4) + 6\,(p_4)),$$

$$\lim_{r=R}\,(P_{5a} - P_{5i}) = -\frac{32\pi}{R^3}\,(-A_1(p_5) + 3\,(p_5)).$$

Um die Änderung der normalen Ableitung von P_m beim Durchgang des Aufpunktes durch die belegte Fläche zu erhalten, bilde man $\lim_{r=R}\left(\frac{\partial P_{m_a}}{\partial r} - \frac{\partial P_{m_i}}{\partial r}\right)$. Da

$$(23\,a)\quad \left|\begin{array}{l} \frac{\partial P_{m_a}}{\partial r} = (-1)^m 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} X_n(\vartheta,\varphi) \\ \qquad \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-2))(n+1)}{2n+1} \frac{R^{n-(m-3)}}{r^{n+2}}, \end{array}\right.$$

$$(23\,b)\quad \left|\frac{\partial P_{m_i}}{\partial r} = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} X_n(\vartheta,\varphi) \frac{n(n-1)\ldots(n+(m-1))}{2n+1} \frac{r^{n-1}}{R^{n+m-2}}\right.$$

ist, so wird für grades $m = 2\lambda$:

$$(24\,a)\quad \left|\begin{array}{l} \lim_{r=R}\left(\frac{\partial P_{2\lambda_a}}{\partial r} - \frac{\partial P_{2\lambda_i}}{\partial r}\right) = -\frac{4\pi}{R^{2\lambda-1}} \sum_{n=0}^{\infty} X_n(\vartheta,\varphi)\, n(n+1) \\ \qquad \cdot \frac{(n+2)\ldots(n+2\lambda-1) - (n-1)(n-2)\ldots(n-(2\lambda-2))}{2n+1}, \end{array}\right.$$

für ungrades $m = 2\lambda+1$:

$$(24\,b)\quad \left|\begin{array}{l} \lim_{r=R}\left(\frac{\partial P_{(2\lambda+1)a}}{\partial r} - \frac{\partial P_{(2\lambda+1)i}}{\partial r}\right) = -\frac{4\pi}{R^{2\lambda}} \sum_{n=0}^{\infty} X_n(\vartheta,\varphi)\, n(n+1) \\ \qquad \cdot \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-(2\lambda-1)) + (n+2)\ldots(n+2\lambda)}{2n+1}. \end{array}\right.$$

Mittels der Gleichung (15) S. 32 nimmt der Quotient Q'' unter dem Summenzeichen von (24 a) folgende Form an:

$$Q'' = n(n+1)\left|\frac{z+\frac{3}{2}\;\;z+\frac{5}{2}\;\;z+\frac{7}{2}\;\cdots\;z+\frac{(4\lambda-3)}{2}}{z} - \frac{z-\frac{3}{2}\;\;z-\frac{5}{2}\;\;z-\frac{7}{2}\;\cdots\;z-\frac{(4\lambda-3)}{2}}{z}\right|,$$

$$= \frac{n(n+1)}{2^{2\lambda-2}} \frac{z^{2\lambda-2} + a_1 z^{2\lambda-3} + \ldots + a_{2\lambda-3} z + a_{2\lambda-2}}{z} - \frac{z^{2\lambda-2} - a_1 z^{2\lambda-3} + \ldots - a_{2\lambda-3} z + a_{2\lambda-2}}{z},$$

$$= \frac{n(n+1)}{2^{2\lambda-2}} \frac{2a_1 z^{2\lambda-3} + 2a_3 z^{2\lambda-5} + \ldots + 2a_{2\lambda-3} z}{z},$$

$$(25)\quad Q'' = \frac{n(n+1)}{2^{2\lambda-3}}(a_1 z^{2\lambda-4} + a_3 z^{2\lambda-6} + \ldots + a_{2\lambda-5} z^2 + a_{2\lambda-3}).$$

Setzt man in (25) für z die Ausdrücke unter (16) S. 33 ein, so ergibt sich:

$$Q'' = \frac{n(n+1)}{2^{2\lambda-3}} (a_1 2^{2\lambda-4} n^{\lambda-2} (n+1)^{\lambda-2} + \bar{a}_3 n^{\lambda-3} (n+1)^{\lambda-3} + \ldots + \bar{a}_{2\lambda-5} n(n+1) + \bar{a}_{2\lambda-3}),$$

$$(26) \quad \begin{cases} Q'' = \frac{1}{2^{2\lambda-3}} (a_1 2^{2\lambda-4} n^{\lambda-1} (n+1)^{\lambda-1} + \bar{a}_3 n^{\lambda-2} (n+1)^{\lambda-2} \\ \qquad + \ldots + \bar{a}_{2\lambda-5} n^2 (n+1)^2 + \bar{a}_{2\lambda-3} n(n+1)), \end{cases}$$

und bei Anwendung der Formel (26) geht (24 a) über in:

$$(27) \quad \begin{cases} \lim\limits_{r=R} \left(\frac{\partial P_{2\lambda a}}{\partial r} - \frac{\partial P_{2\lambda i}}{\partial r} \right) = -\frac{4\pi}{R^{2\lambda-1}} \left\{ (-1)^{\lambda-1} \frac{a_1}{2} \Delta_{\lambda-1}(\mu) \right. \\ \left. + (-1)^{\lambda-2} \bar{a}_3 \Delta_{\lambda-2}(\mu) + \ldots + \bar{a}_{2\lambda-5} \Delta_2(\mu) - \bar{\bar{a}}_{2\lambda-3} \Delta_1(\mu) \right\}. \end{cases}$$

Die Koeffizienten bestimmen sich folgendermaßen:

$$a_1 = z_3 + z_4 + \ldots + z_{2\lambda-2} = 3 + 5 + \ldots + (2\lambda-3) = (2\lambda-1)^2 - 1 = 4\lambda(\lambda-1).$$

$$\bar{a}_{2\lambda-3} = \frac{1}{2^{2\lambda-3}} \bar{a}_{2\lambda-3} = \frac{1}{2^{2\lambda-3}} \{ a_{2\lambda-3} + a_{2\lambda-5} + a_{2\lambda-7} + \ldots + a_3 + a_1 \},$$

$$\bar{a}_{2\lambda-3} = \frac{1}{2^{2\lambda-3}} \sum_0^{\lambda-2} a_{2\nu+1}, \text{ oder}$$

$$\bar{a}_{2\lambda-3} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2\lambda-2)(2\lambda-2).$$

Die $a_{2\nu}$ sind die Koeffizienten der Gleichung $(2\lambda-2)$-ten Grades von z.

$$\bar{a}_{2\lambda-5} = \frac{1}{2^{2\lambda-3}} \bar{a}_{2\lambda-5} = \frac{1}{2^{2\lambda-3}} \cdot 4 \{ a_{2\lambda-5} + 2 a_{2\lambda-7} + 3 a_{2\lambda-9} + \ldots + (\lambda-3) a_3 + (\lambda-2) a_1 \},$$

$$= \frac{1}{2^{2\lambda-5}} \sum_{\lambda-s}^{1} \mu \sum_0^{\lambda-3} a_{2\nu+1}; \qquad (s = 2, 3, \ldots).$$

Die Bestimmung der übrigen Koeffizienten erfolgt analog.

Der Quotient Q''' unter dem Summenzeichen von (24 b) wird mit Hilfe der Gleichungen (15) S. 32:

$$Q''' = n(n+1) \frac{\frac{z-3}{2} \frac{z-5}{2} \cdots \frac{z-(4\lambda-1)}{2} + \frac{z+3}{2} \frac{z+5}{2} \cdots \frac{z+(4\lambda-1)}{2}}{z},$$

$$= \frac{n(n+1)}{2^{2\lambda-1}} \frac{1}{z} [z^{2\lambda-1} - a_1 z^{2\lambda-2} + \ldots + a_{2\lambda-2} z - a_{2\lambda-1} + z^{2\lambda-1} + a_1 z^{2\lambda-2} + \ldots + a_{2\lambda-2} z + a_{2\lambda-1}],$$

$$= \frac{n(n+1)}{2^{2\lambda-1}} \frac{1}{z} [2 z^{2\lambda-1} + 2 a_2 z^{2\lambda-3} + 2 a_4 z^{2\lambda-5} + \ldots + 2 a_{2\lambda-4} z^3 + 2 a_{2\lambda-2} z],$$

$$(28) \quad \begin{cases} Q''' = \frac{n(n+1)}{2^{2\lambda-2}} (z^{2\lambda-2} + a_2 z^{2\lambda-4} + a_4 z^{2\lambda-6} \\ \qquad + \ldots + a_{2\lambda-4} z^2 + a_{2\lambda-2}). \end{cases}$$

Setzt man hierin für z die Ausdrücke unter (16) S. 33 ein, so ergibt sich:

$$Q''' = \frac{n(n+1)}{2^{2\lambda-2}} (2^{2\lambda-2} n^{\lambda-1} (n+1)^{\lambda-1} + \bar{a}_2 n^{\lambda-2} (n+1)^{\lambda-2} + \ldots + \bar{a}_{2\lambda-4} n(n+1) + \bar{a}_{2\lambda-2}),$$

$$(29) \quad \begin{cases} Q''' = \frac{1}{2^{2\lambda-2}} \{2^{2\lambda-2} n^{\lambda} (n+1)^{\lambda} + \bar{a}_2 n^{\lambda-1} (n+1)^{\lambda-1} \\ \qquad + \ldots + \bar{a}_{2\lambda-4} n^2 (n+1)^2 + \bar{a}_{2\lambda-2} n(n+1)\}, \end{cases}$$

und bei Anwendung der Formel (29) geht (24 b) über in:

$$(30) \quad \begin{cases} \lim_{r=R} \left(\frac{\partial P_{(2\lambda+1)a}}{\partial r} - \frac{\partial P_{(2\lambda+1)i}}{\partial r} \right) = -\frac{4\pi}{R^{2\lambda}} \{(-1)^{\lambda} A_{\lambda}(\mu) \\ + (-1)^{\lambda-1} \bar{a}_2 A_{\lambda-1}(\mu) + \ldots + \bar{a}_{2\lambda-4} A_2(\mu) - \bar{a}_{2\lambda-2} A_1(\mu)\}. \end{cases}$$

Die Koeffizienten bestimmen sich folgendermaßen:

$$\bar{a}_{2\lambda-2} = \frac{1}{2^{2\lambda-2}} \bar{a}_{2\lambda-2} = \frac{1}{2^{2\lambda-2}} \{a_{2\lambda-2} + a_{2\lambda-4} + a_{2\lambda-6} + \ldots + a_4 + a_2 + 1\},$$

$$\bar{a}_{2\lambda-2} = \frac{1}{2^{2\lambda-2}} \sum_{0}^{\lambda-1} a_{2\nu}; \qquad (a_0 = 1), \text{ oder}$$

$$\bar{a}_{2\lambda-2} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2\lambda-1)(2\lambda-1).$$

$$\bar{a}_{2\lambda-4} = \frac{1}{2^{2\lambda-2}} \bar{a}_{2\lambda-4} = \frac{1}{2^{2\lambda-2}} \cdot 4 \{a_{2\lambda-4} + 2 a_{2\lambda-6} + 3 a_{2\lambda-8} + \ldots + (\lambda-2) a_2 + (\lambda-1)\},$$

$$\bar{a}_{2\lambda-4} = \frac{1}{2^{2\lambda-4}} \sum_{\lambda-s}^{1} \mu \sum_{0}^{\lambda-2} a_{2\nu}; \qquad (s = 1, 2, 3 \ldots).$$

Auf analoge Weise werden die übrigen Koeffizienten bestimmt.

Die Gleichungen (27) und (30) zeigen, wie sich die normale Ableitung einer m-fach belegten Kugelfläche beim Durchgang des Aufpunktes durch die belegte Fläche ändert.

Für eine vier- und fünffach belegte Kugelfläche findet man:

$$\lim_{r=R}\left(\frac{\partial P_{4a}}{\partial r}-\frac{\partial P_{4i}}{\partial r}\right)=\frac{16\pi}{R^3}\,A_1(p_4),$$

$$\lim_{r=R}\left(\frac{\partial P_{5a}}{\partial r}-\frac{\partial P_{5i}}{\partial r}\right)=\frac{4\pi}{R^4}\,(A_2(p_5)-18\,A_1(p_5)).$$

Am Schlusse dieser Arbeit ist es mir eine angenehme Pflicht, meinen hochverehrten Lehrern Herrn Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Gutzmer und Herrn Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Wangerin für die liebenswürdige Beratung bei der Ausführung der Arbeit ergebenst zu danken.

Druckfehler.

Auf S. 32 Z. 2 fehlt auf der rechten Seite der Gleichung das Vorzeichen $(-1)^{m-1}$.

Lebenslauf.

Geboren bin ich, Margarete Freund, am 1. März 1896 zu Halle (Saale) als Tochter des Lehrers Alwin Freund und seiner Frau Lina, geb. Sonntag. Ich bin evangelischer Konfession und gehöre dem preußischen Staate an. Von Ostern 1902 an besuchte ich drei Jahre die Mittelschule, darauf das städtische Lyzeum und die Studienanstalt zu Halle, die ich Ostern 1915 nach bestandener Reifeprüfung verließ, um an das Oberlyzeum zu Frankfurt a. O. überzusiedeln. Hier erwarb ich im Herbst 1915 die Lehramtsbefähigung; ich verpflichtete mich zum Hilfsdienst und war vom November 1915 bis Ostern 1918 in Spremberg und Halle im Schuldienst tätig. Von Michaelis 1917 ab studierte ich in Halle Mathematik, Physik und Erdkunde.

Meine Lehrer waren die Herren Professoren: Eberhard, Frischeisen-Köhler, Grammel, Gutzmer, Jung, Menzer, Mie, Prange, Schenck, Schlüter, Schmidt, Tubandt, Vorländer, Walther, Wangerin, Ziehen.

Allen meinen verehrten Lehrern bin ich zu großem Danke verpflichtet, insbesondere Herrn Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Gutzmer, dessen Assistentin ich von Ostern 1920 bis Ostern 1922 war und dessen mannigfache Ratschläge mein Studium wesentlich förderten.